

Fisica. — *Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio.* Nota ⁽¹⁾ di G. GENTILE e E. MAJORANA, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

1. Vogliamo mostrare in questa Nota che il potenziale di Fermi non solo permette una buona determinazione *a priori* di tutti i livelli energetici degli atomi pesanti; ma permette anche di calcolare con grande esattezza, dato il carattere statistico di questa teoria dell'atomo, lo sdoppiamento dei termini; cosa tanto più importante quando si pensi che a questi sdoppiamenti non erano applicabili le formule relativistiche di Sommerfeld, uscendo questo fenomeno fuori dagli schemi della teoria della struttura fina. Infatti si sa che bisogna ricorrere all'ipotesi dell'elettrone rotante, ipotesi che del resto ha perso ogni carattere ipotetico e appare oggi come fondata su solide basi teoriche, dopo l'ultimo lavoro di Dirac ⁽²⁾. I nostri calcoli si riferiscono per i livelli Roentgen al termine 3 M del Gadolino ($Z = 64$) e dell'Uranio ($Z = 92$) e per i termini ottici ai termini P del cesio ($Z = 55$).

Il potenziale elettrostatico nell'interno d'un atomo di numero Z si può porre sotto la forma: $V = \frac{Ze}{r} \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right)$ dove φ è una funzione numerica in genere minor d'uno, che tien conto dell'azione di schermo delle altre cariche elettroniche. Precisamente in prossimità del nucleo ove questa azione è minima $\varphi = 1$, inoltre per r crescente φ diminuisce finchè, per $r = \infty$ e per atomi neutri, $\varphi = 0$.

Evidentemente i valori di φ dipendono dalla distribuzione media locale degli elettroni intorno al nucleo. Di questa nuvola di elettroni si sa inoltre questo: che obbedisce al principio di Pauli. Quindi la statistica di Fermi applicata a questo speciale gas degenere fornisce un'ulteriore relazione fra potenziale e densità elettrica. Scrivendo allora l'equazione di Poisson, Fermi ⁽³⁾ arriva all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \text{in cui: } x = \frac{r}{\mu} \quad ; \quad \mu = \frac{3^{\frac{2}{3}} h^2}{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} m e^2 Z^{\frac{1}{3}}}$$

Se si fissa l'attenzione su di un determinato elettrone si può in prima approssimazione ritenere ⁽⁴⁾ che gli altri $Z - 1$ siano distribuiti come in un

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1928.

(2) DIRAC, «Roy. Soc. Proc.». A, vol. 117, p. 610; vol. 118, p. 351, 1928.

(3) FERMI, «Ztschr. für Phys.», 48, p. 73, 1928.

(4) ID., «Rendic. Lincei», serie 6^a, vol. VII, fasc. 9, p. 726, 1928.

atomo neutro di numero $Z - 1$ e quindi scrivere il potenziale a cui esso è soggetto: $V = \frac{e}{r} \left[1 + (Z - 1) \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right) \right]$; naturalmente così si trascurano, nel caso di un elettrone interno, sopra tutto le conseguenze del principio di Pauli, che non è un principio statistico ma un rigoroso principio di esclusione, e nel caso di un elettrone esterno la polarizzazione che nasce nel resto atomico. Tuttavia nel primo caso l'errore è minimo e nel secondo esistono incertezze di più grave importanza dovute all'esistenza del sistema periodico che si manifesta con regolari oscillazioni di tutte le proprietà atomiche superficiali intorno a un andamento medio; il solo perseguibile con mezzi statistici.

2. L'equazione di Schrödinger si scriverà in generale:

$$\Delta_2 \psi + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r} (Z - 1) \varphi \right] \psi = 0.$$

Se k è il quanto azimutale, ψ si spezza in una funzione sferica di ordine k e in una funzione del raggio che conviene mettere sotto la forma $\frac{\chi}{r}$; la χ obbedisce allora all'equazione:

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \left[\frac{k(k+1)}{x^2} - a \frac{1 + (Z-1)\varphi}{x} + \varepsilon \right] \chi$$

essendo:

$$a = \frac{8 \pi^2 m}{h^2} e^2 \mu \quad ; \quad \varepsilon = - \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \mu^2 E$$

l'integrazione numerica per i tentativi è semplice nel caso di quanto radiale l (nessun nodo nella χ). In prossimità dello zero ci siamo serviti dello sviluppo in serie della φ .

Per il termine 3 *d* del gadolino, $\varepsilon = 4,29$ e quindi il termine espresso in Rydberg risulta: $-E = 86,3$, in esatto accordo con l'esperienza (86,6) ove si tenga conto della correzione relativistica che abbassa il termine semplice in maniera che risulti la sua distanza dal termine più basso precisamente la metà della distanza fra i termini effettivi. Lo sdoppiamento in una teoria semplificata si calcolerebbe in base all'energia mutua fra il momento magnetico dell'elettrone e il valor medio del campo magnetico virtuale in cui esso viene a trovarsi.

La teoria di Dirac dà in prima approssimazione;

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \frac{\int \psi \bar{\psi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} dS}{mc^2}.$$

Per il gadolino si trova: $\Delta E = 2,20 R$, in buon accordo con l'esperienza (2,4 R).

Il calcolo ripetuto per lo stesso termine dell'uranio dà: $E = 258 R$ (anche questa volta in piena armonia con il valore sperimentale 255) e $\Delta E = 11,7$ invece di 12,96.

3. Il calcolo del termine $6p$ del cesio, perfettamente analogo al precedente, conduce all'autofunzione di cui riportiamo i valori numerici. Si trova per il valore del termine:

$$n = 24600 \text{ cm}^{-1}$$

di fronte al doppietto sperimentale:

$$n_1 = 19674$$

$$n_2 = 20228$$

lo sdoppiamento calcolato secondo la formula ricordata più sopra con il coefficiente corrispondente al diverso quanto azimutale risulta:

$$\Delta n = 1020 \text{ cm}^{-1}$$

invece del valore sperimentale:

$$\Delta n = 554 \text{ cm}^{-1}$$

Le divergenze fra teoria e esperienza si spiegano perfettamente entro l'ambito delle approssimazioni statistiche, fra le quali ha massima importanza quella che dipende dal posto che l'elemento occupa nel sistema periodico. Precisamente essendo il cesio un metallo alcalino, il resto atomico ha la struttura compatta dei gas nobili, di modo che la carica efficace, per l'elettrone luminoso tende a 1 con particolare rapidità. Nè deve sorprendere che per lo sdoppiamento si manifesti uno scarto tanto più forte che per l'energia. Per comprenderne intuitivamente la ragione basta riferirsi al modello classico di Bohr-Sommerfeld; si vede allora facilmente che tutte le orbite molto allungate e di uguale quanto azimutale hanno approssimativamente la stessa distanza perielica e in vicinanza del nucleo si confondono in una unica curva percorsa con la stessa legge orario. Ora è essenzialmente in questa zona che ha origine lo sdoppiamento; segue che esso è all'incirca inversamente proporzionale al periodo di rivoluzione (intervallo fra due passaggi al perielio). Se la non newtonianità del campo si manifesta fortemente, come nel nostro caso, già a non grande distanza dall'afelio, un allungamento anche modesto dell'orbita determina una variazione considerevolissima del periodo di rivoluzione (1). Del resto un calcolo diretto mostra che la nostra inter-

(1) In generale, per livelli non eccitati o per livelli eccitati di debole quanto azimutale, si ha nel modello classico un ordinario moto a rosetta. Al contrario, per taluni

pretazione è fondata. Supponiamo di correggere il potenziale statistico in guisa che il valore del termine si accordi con quello sperimentale. Ciò può farsi in infiniti modi; tuttavia una limitazione si impone, e cioè che il potenziale corretto sia sempre intermedio fra quello statistico e quello newtoniano limite. Si trova allora che esiste un limite superiore per lo sdoppiamento calcolato in base all'autofunzione corrispondente, il quale vale:

$$\Delta_s n = 750 \text{ cm}^{-1}$$

esso corrisponde al passaggio brusco del potenziale statistico a quello newtoniano a una distanza di circa 2,2 Å dal nucleo. Con un raccordo più verosimile fra potenziale statistico e newtoniano del tipo:

$$\frac{v_s - v}{v_s - v_n} = e^{-k\varphi}$$

si trova un valore in quasi perfetto accordo con l'esperienza.

Abbiamo infine calcolato il rapporto fra le intensità delle prime due righe di assorbimento. Se si indica con ψ_0 l'autofunzione corrispondente al termine fondamentale 6_s e con ψ'_1 e ψ''_1 quelle corrispondenti ai termini 6_p e 7_p , tale rapporto vale:

$$\frac{i_1}{i_2} = \left[\frac{\int \psi_0 \bar{\psi}'_1 x^3 dx}{\int \psi_1 \bar{\psi}''_1 x^3 dx} \right]^2$$

Le auto-funzioni sono state determinate conservando il potenziale statico fino a $r = 2,2$ Å e il potenziale newtoniano a distanza maggiore. In queste condizioni, come si è detto, si ottiene per il termine 6_p il valore sperimentale; è notevole che nelle stesse condizioni anche il valore teorico del termine 7_p si accordi presso che esattamente con l'esperienza. Per ragioni di semplicità non si è determinato teoricamente il termine 6_s ; l'autofunzione ψ_0 è stata invece costruita dall'infinito e fino a non grande distanza dal nucleo, in base al valore sperimentale del termine. Le χ non normalizzate sono riportate nella tabella. Si trova:

$$\frac{i_1}{i_2} = 125$$

Lo sdoppiamento del termine 7_p calcolato in base all'autofunzione ψ''_1 risulta:

$$\Delta_s n = 220 \text{ cm}^{-1}$$

livelli eccitati di forte quanto azimutale, l'orbita di Bohr-Sommerfeld si spezza in due distinte, di cui l'una si svolge nella zona profonda dell'atomo, l'altra nella regione più esterna. Il modello cessa allora di dare indicazioni intuitive.

e deve ancora considerarsi come un limite superiore. L'esperienza dà:

$$\Delta_n = 181$$

in accordo questa volta assai migliore, per ragioni facili a comprendersi.

TAVOLA I.

x	χ_{64}	χ_{92}
0,2	0,174	2,138
0,4	0,603	6,840
0,6	0,925	8,265
0,8	1,031	7,231
1,0	0,976	5,482
1,2	0,838	3,739
1,4	0,675	2,396
1,6	0,521	1,515
1,8	0,389	0,940
2,0	0,284	0,570

TAVOLA II.

x	χ
0	0
0,1	0,0519
0,2	0,1030
0,4	0,0627
0,6	-0,0593
0,8	-0,1442
1	-0,1587
1,5	0,0019
2	0,1831
3	0,2024
4	-0,0374
6	-0,3990
8	-0,3764
10	-0,1508
12	0,1276
16	0,5942
20	0,8503
25	0,9281
30	0,8474
35	0,7012
40	0,5462
50	0,2990

TAVOLA III.

x	χ_0	χ'_1	χ''_1
4	-0,091	-0,038	-0,039
5	-0,390	-0,269	-0,270
6	-0,513	-0,399	-0,399
7	-0,477	-0,426	-0,425
8	-0,336	-0,376	-0,373
9	-0,141	-0,276	-0,270
10	0,072	-0,147	-0,139
11	0,279	-0,007	0,004
12	0,466	0,134	0,147
14	0,757	0,391	0,406
16	0,931	0,596	0,601
18	1,000	0,740	0,723
20	1,005	0,840	0,788
25	0,898	0,967	0,781
30	0,717	0,962	0,571
35	0,535	0,876	0,234
40	0,377	0,749	-0,154
50	0,171	0,484	-0,820
60	0,071	0,282	-1,227
70	0,027	0,153	-1,326
80	0,010	0,079	-1,221
100	0,001	0,019	-0,791

SULLA FORMAZIONE DELLO IONE MOLECOLARE DI ELIO

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *La stabilità dello ione He_2 può essere studiata, anche quantitativamente, con il metodo di HEITLER e LONDON, e i risultati si accordano con i dati sperimentali disponibili. Si riconosce che questo composto è analogo a H_2 , benchè l'elettrone esterno si trovi in uno stato differente, e che gli elettroni interni non hanno solo l'ufficio di schermare le cariche dei nuclei, ma contribuiscono in modo essenziale alla costruzione molecolare.*

Le osservazioni di WEIZEL e PESTEL ⁽¹⁾, CURTIS e HARVEY ⁽²⁾ e altri sullo spettro di bande dell'elio hanno dimostrato che alcune costanti molecolari (quanto di oscillazione, momento di inerzia) tendono, per gli stati più elevati dell'elettrone luminoso, a limiti determinati che è naturale attribuire alle corrispondenti grandezze dello ione He_2^+ ; di questo è così dimostrata la possibilità di esistenza, almeno nello stato fondamentale, a cui è da ascrivere ⁽³⁾ con sicurezza la configurazione $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2\Sigma$, e poichè si ha motivo di credere, secondo le più recenti conclusioni di W. WEIZEL ⁽⁴⁾ che la molecola neutra si formi da un atomo nello stato fondamentale e un atomo eccitato, si può presumere che lo ione si dissoci, per quanti di oscillazione elevati, o per un allontanamento adiabatico dei nuclei, se, come vogliamo fare, li riguardiamo come fissi, in un atomo neutro e un atomo ionizzato, entrambi nello stato fondamentale ⁽⁵⁾. Noi vogliamo qui studiare la reazione $He + He^+$ dal punto di vista energetico e dimostrare che essa può effettivamente condurre alla formazione dello ione molecolare; un calcolo di prima approssimazione dà anzi in questo caso per la distanza di equilibrio dei nuclei e per il quanto di oscillazione valori che assai bene si accordano con quelli trovati sperimentalmente. Il metodo seguito è quello applicato la prima volta da HEITLER e LONDON ⁽⁶⁾ allo studio della molecola

⁽¹⁾ W. WEIZEL e E. PESTEL, « ZS. f. Phys. », **56**, 97, 1929; W. WEIZEL, « ZS. f. Phys. », **56**, 727, 1929.

⁽²⁾ W. E. CURTIS e A. HARVEY, « Proc. of Roy. Soc. », **125**, 484, 1929.

⁽³⁾ W. WEIZEL, « ZS. f. Phys. », **56**, 727, 1929.

⁽⁴⁾ W. WEIZEL, « ZS. f. Phys. », **59**, 320, 1930.

⁽⁵⁾ Cfr. F. HUND, « ZS. f. Phys. », **63**, 719, 1930.

⁽⁶⁾ W. HEITLER e F. LONDON, « ZS. f. Phys. », **44**, 455, 1927.

di idrogeno e consiste nell'assumere, come autofunzioni elettroniche della molecola, determinate combinazioni lineari delle autofunzioni appartenenti agli atomi separati, e nel valutare su di esse il valor medio dell'interazione fra i due atomi; ma è da notare che avendo i nuclei la stessa carica ed essendo uno degli atomi ionizzato, il problema è, come vedremo, meccanicamente affatto diverso da quello esaminato da HEITLER e LONDON, e in genere da quello contemplato dall'ordinaria teoria della valenza omeopolare ⁽¹⁾.

1. Supponiamo gli atomi separati e a grande distanza; se prescindiamo per un momento dal fatto che stati in cui il primo atomo è neutro e il secondo ionizzato, e stati in cui il primo atomo è ionizzato e il secondo neutro, hanno la stessa energia e vanno quindi considerati insieme nel calcolo di perturbazione, e riguardiamo invece il *primo* atomo come neutro e il *secondo* come ionizzato, abbiamo un problema meccanicamente simile a quello della reazione ⁽²⁾ $He + H$, e poichè a He appartiene un anello elettronico chiuso, il modo di reazione è unico, cioè non ha luogo per l'interazione dei due atomi una separazione di termini (soddisfacenti al principio di PAULI) e inoltre le forze di risonanza sono certamente repulsive. Vero è che le forze attrattive di polarizzazione sono nel nostro caso di natura diversa da quelle che agiscono fra atomi neutri, perchè mentre le prime dipendono da un potenziale che diminuisce a grande distanza come R^{-4} le seconde si annullano più rapidamente, dipendendo da un potenziale che varia come R^{-6} , ma è da osservare che la polarizzabilità dell'atomo neutro He è assai piccola e perciò in nessun modo le forze di polarizzazione possono da sole dare origine ad uno stabile legame. Per spiegare la affinità chimica fra He e He^+ dobbiamo invece togliere la restrizione posta e lasciare libero l'atomo neutro, di ceder quando voglia, un elettrone all'atomo ionizzato e di assumerne quindi le veci. Questo ha per effetto di sdoppiare il termine risultante dall'unione dei due atomi, press'a poco senza alterarne il valor medio; e lo sdoppiamento dipende non più dalla risonanza degli elettroni, ma dal comportamento delle autofunzioni di fronte alla riflessione nel centro della molecola, potendo esse restare inalterate per la detta *inversione*, e si dicono *pari*, oppure

(1) F. LONDON, « ZS. f. Phys. », **46**, 455, 1927; **50**, 24, 1928. W. HEITLER, « ZS. f. Phys. », **46**, 47, 1927; **47**, 835, 1928. Per una visione di insieme, W. HEITLER, « Phys. ZS. », **31**, 185, 1930. E. A. HYLLEBAAS ha incontrato l'ulteriore degenerazione derivante dall'uguaglianza dei nuclei nello studio della reazione fra atomi di idrogeno diversamente eccitati, « ZS. f. Phys. », **51**, 150, 1928.

(2) Cfr. G. GENTILE, « ZS. f. Phys. », **63**, 795, 1930.

mutare segno, e si dicono *dispari*. Si potrebbe parlare di *risonanza* dei nuclei, ma solo per metafora, non già nel senso proprio, che è differente, poichè qui consideriamo soltanto le autofunzioni elettroniche. La separazione del termine dovuta alla sua parità o disparità è di un'ordine di grandezza maggiore dell'energia dovuta alle forze repulsive di *valenza*; dobbiamo quindi ritenere che uno dei modi di reazione corrisponde a repulsione e non dà luogo a legame chimico, mentre l'altro dà origine a forze attrattive e conduce alla formazione dello ione molecolare. Possiamo riconoscere i due modi di reazione con le considerazioni seguenti. Poichè abbiamo a che fare con tre elettroni, si può pretendere che due di essi, e siano l'elettrone 1, e l'elettrone 2, abbiano lo *spin* parallelo; l'autofunzione deve allora essere antisimmetrica nelle coordinate dei due primi elettroni, così che per nuclei molto lontani essi stanno certamente l'uno in vicinanza di un nucleo (a), e l'altro in vicinanza dell'altro nucleo (b) e possono cambiar di sede solo contemporaneamente; e l'autofunzione, in quanto dipendente dai primi due elettroni, cambia allora di segno. Segue che gli elettroni 1 e 2 danno luogo insieme ad un termine dispari descritto da un'autofunzione che cambia segno per inversione; ma i soli stati individuali che vengono in considerazione sono quelli che derivano dagli stati $1s$ degli atomi separati e cioè $1s\sigma$ e $2p\sigma$, il primo pari ed il secondo dispari, e gli elettroni 1 e 2 sono quindi un elettrone $1s\sigma$ e uno $2p\sigma$ (o viceversa).

Al terzo elettrone potremo assegnare un'autofunzione pari ($1s\sigma$) o una dispari ($2p\sigma$) che si formano rispettivamente per somma o differenza dalle autofunzioni degli atomi separati; nel primo caso otteniamo come configurazione complessiva $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$, quella cioè che appartiene allo stato fondamentale di He_2^+ e corrisponde effettivamente ad attrazione dei due atomi, nel secondo caso troveremo invece la configurazione $1s\sigma (2p\sigma)^2 {}^2\Sigma$ che appartiene a un livello eccitato, probabilmente instabile di He_2^+ , e dà luogo all'altro modo di reazione, quello cioè che corrisponde a repulsione. Vediamo di qui che la causa essenziale della stabilità di He_2^+ è quella stessa che provvede alla stabilità dello ione molecolare di idrogeno.

2. Se con Φ e φ indichiamo le autofunzioni dell'atomo (a), rispettivamente neutro o ionizzato, e con Ψ e ψ quelle analoghe dell'atomo (b), come autofunzioni imperturbate degli atomi separati dovremo considerare le sei seguenti che derivano l'una dall'altra per permutazione degli elettroni e scambio dei nuclei.

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 = \varphi_1 \Psi_{23}, & B_1 = \phi_1 \Phi_{23}, \\ A_2 = \varphi_2 \Psi_{31}, & B_2 = \psi_2 \Phi_{31}, \\ A_3 = \varphi_3 \Psi_{12}, & B_3 = \phi_3 \Phi_{12}. \end{cases}$$

L'interazione degli atomi, spezza il termine multiplo sei volte separando le autofunzioni corrette di approssimazione nulla secondo i caratteri di simmetria ⁽¹⁾ negli elettroni e secondo il comportamento rispetto all'inversione. Indicando con un segno + i termini pari e con un segno - i termini dispari, le sole simmetrie che si presentano sono le seguenti:

$$(\overline{123})^+, (\overline{123})^-, (123)^+, (\overline{123})^-,$$

e si hanno in corrispondenza quattro termini, di cui i primi due sono semplici e gli ultimi due doppi, per degenerazione nascosta; e poichè i primi due sono esclusi dal principio di PAULI, essendo simmetrici nei tre elettroni, rimangono in campo il terzo, che a causa della sua parità corrisponde alla configurazione $1s\sigma (2p\sigma)^2 {}^2\Sigma$, e il quarto che è per noi il più interessante, poichè porta alla formazione di He_2^+ e quindi alla configurazione $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2\Sigma$. Le autofunzioni dei quattro termini sono, a meno di un fattore di normalizzazione:

$$(2) \quad \begin{cases} (\overline{123})^+ & y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3, \\ (\overline{123})^- & y_2 = A_1 + A_2 + A_3 - B_1 - B_2 - B_3, \\ (123)^+ & y_3 = A_1 - A_2 + B_1 - B_2, \\ (\overline{123})^- & y_4 = A_1 - A_2 - B_1 + B_2, \end{cases}$$

essendosi scelta per il terzo e il quarto l'autofunzione antisimmetrica in 1 e 2. La funzione di perturbazione è naturalmente differente secondo che si considera l'uno o l'altro degli stati imperturbati (1), poichè gli elettroni non figurano simmetricamente nell'Hamiltoniana degli atomi astrattamente separati, e abbiamo allora sei Hamiltoniane differenti, secondo la configurazione degli elettroni, per gli atomi separati e una sola, simmetrica, per gli atomi riuniti. Nella configurazione A_1 l'energia di perturbazione sarà espressa, ad es., da

$$H = \frac{4e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{13}} - \frac{2e^2}{r_{1b}} - \frac{2e^2}{r_{2a}} - \frac{2e^2}{r_{3a}},$$

essendo $R, r_{12}, r_{13}, r_{1b}, r_{2a}, r_{3a}$, le distanze del nucleo e dell'elettrone del primo atomo dal nucleo e dagli elettroni del secondo. La variazione di un generico autovalore si otterrà in prima approssimazione dall'espressione simbolica

$$(3) \quad E_i = \frac{\int \bar{y}_i H y_i d\tau}{\int \bar{y}_i y_i d\tau} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

(¹) F. HUND, « ZS. f. Phys. », 43, 788, 1927.

badando che H opera diversamente, come si è detto, sui vari termini da cui ogni y_i risulta costituita a norma di (2). Esplicitando la (3) troviamo

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{I_0 + 2I_1 + 2I_2 + I_3}{1 + 2S_1 + 2S_2 + S_3}, \\ E_2 &= \frac{I_0 - 2I_1 + 2I_2 - I_3}{1 - 2S_1 + 2S_2 - S_3}, \\ E_3 &= \frac{I_0 - I_1 - I_2 + I_3}{1 - S_1 - S_2 + S_3}, \\ E_4 &= \frac{I_0 + I_1 - I_2 - I_3}{1 + S_1 - S_2 - S_3}, \end{aligned} \right.$$

essendo

$$(5) \quad S_1 = \int B_2 A_1 d\tau; \quad S_2 = \int A_2 A_1 d\tau; \quad S_3 = \int B_1 A_1 d\tau;$$

$$(6) \quad I_0 = \int A_1 H A_1 d\tau; \quad I_1 = \int B_2 H A_1 d\tau; \quad I_2 = \int A_2 H A_1 d\tau;$$

$$I_3 = \int B_1 H A_1 d\tau.$$

Per nuclei abbastanza lontani (ma non eccessivamente) tutti gli integrali I sono negativi e gli S positivi e per l'ordine di grandezza si ha

$$\begin{aligned} -I_1 &> -I_2 > -I_3, \\ S_1 &> S_2 > S_3. \end{aligned}$$

Prescindendo nelle (4) dalle variazioni dei denominatori, che a distanza sufficientemente grande sono prossimi all'unità, e trascurando I_3 l'energia risulta essenzialmente costituita dalla «energia elettrostatica» I_0 , che è comune a tutti i termini, anche non paulistici, e si può trascurare a causa della sua piccolezza, e da combinazioni della «energia di scambio» I_2 , che corrisponde alle forze di valenza, e della energia I_1 , che è preponderante e nasce dalla simmetria del termine rispetto alla inversione. Limitandoci alle soluzioni y_3 e y_4 che sole hanno senso fisico, e badando all'ordine di grandezza e al segno di I_1 e I_2 , troviamo confermato che y_3 dà luogo a repulsione mentre I_4 conduce alla formazione molecolare.

Di quest'ultima ormai ci occuperemo esclusivamente.

3. La valutazione di E_4 in funzione della distanza, cioè la determinazione della così detta curva potenziale della molecola He_2^+ , richiede la valutazione degli integrali (5) e (6), ma poichè la autofunzione dell'atomo neutro di elio nello stato fondamentale, pur

essendo stata numericamente calcolata con notevole esattezza ⁽¹⁾ non è suscettibile di semplice espressione analitica, dobbiamo di necessità operare con autofunzioni imperturbate alquanto schematizzate. Potremmo ad esempio, secondo l'uso, assumere come stato fondamentale di *He* il prodotto di due autofunzioni del tipo idrogeno con uno *Z* efficace pari a $1,6 \div 1,7$, secondo il criterio a cui si ricorre per la determinazione; così se si vuole che l'energia media abbia il valore migliore (minimo) bisogna porre $Z = 2 - \frac{5}{16} = 1,6875$, se invece si vuole che la costante diamagnetica si accordi, così con il valore sperimentale, come con quello fornito da accurate valutazioni ⁽²⁾ teoriche, bisogna assumere $Z = 1,60$. Ma incertezze di maggiore gravità sono insite nella natura del metodo, il quale non è atto a fornire che una prima alquanto rozza approssimazione. Il metodo di HEITLER e LONDON dà infatti indicazioni inattendibili per atomi molto lontani, e non solo perchè trascura le forze di polarizzazione ⁽³⁾, che qui sono preponderanti, ma anche perchè dà errate, nell'ordine di grandezza e *nel segno* le forze di risonanza. Nel caso, ad esempio, della molecola di idrogeno, trattato da HEITLER e LONDON, l'energia di scambio diviene positiva a grandissima distanza, poichè allora l'integrale di SUGIURA ⁽⁴⁾ prevale su tutti gli altri, ciò che porterebbe a credere che la soluzione antisimmetrica sia più profonda di quella simmetrica. Ma questo è da escludere in base a teoremi generali ⁽⁵⁾, e l'apparenza contraria indica solo imperfezione del metodo. Per distanze poi dell'ordine della distanza di equilibrio è verosimile che le autofunzioni perturbate differiscano assai sensibilmente da quelle imperturbate, cosicchè la prima approssimazione non può avere che un valore indicativo. Per queste ragioni abbiamo creduto di procedere ad una schematizzazione che può parere eccessiva, e che si potrebbe infatti diminuire, ma con calcoli laboriosi e di non certa utilità. Abbiamo quindi assunto come autofunzioni dei singoli atomi, autofunzioni del tipo idrogeno, ma con uno stesso $Z = 1,8$, così per l'atomo neutro, come per lo ione. Gli integrali (5) e (6) si riducono allora a integrali elementari ben conosciuti, fra cui quello già ricordato di SUGIURA. Si trova così che la curva potenziale, presenta un minimo quando la distanza

⁽¹⁾ I. C. SLATER, « Phys. Rev. », **32**, 349, 1928; E. HYLLEAAS, « ZS. f. Phys. », **54**, 347, 1929.

⁽²⁾ I. C. SLATER, loc. cit.

⁽³⁾ R. EISENSCHITZ e F. LONDON, « ZS. f. Phys. », **60**, 491, 1930.

⁽⁴⁾ Y. SUGIURA, « ZS. f. Phys. », **45**, 484, 1927.

⁽⁵⁾ W. HEITLER e F. LONDON, loc. cit.

dei nuclei ha il valore

$$d = 1,16$$

mentre sperimentalmente ⁽¹⁾ $d = 1,087\text{\AA}$. È probabile che una più esatta valutazione degli integrali (5) e (6) migliori il già notevole accordo fra i due valori. L'energia corrispondente risulta:

$$E_{min} = -1,41V = -32500 \text{ cal.}$$

Mancano in proposito dati sperimentali, e dobbiamo riguardare il valore ora citato della affinità chimica come un limite inferiore. Raccogliendo tutti gli errori del metodo nelle parole « forze di polarizzazione » si trova che queste dipendono per nuclei molto lontani dal potenziale

$$- \alpha \frac{e^2}{2R^4}$$

essendo $\alpha = 0,20 \cdot 10^{-24}$ la polarizzabilità dell'atomo neutro di elio, e se ammettiamo che tale espressione sia ancora press'a poco valida alla distanza (vera) di equilibrio, ciò che è assai dubbio, troviamo come valore presumibile dell'affinità chimica:

$$- E = 2,4V = 55000 \text{ cal.}$$

Possiamo infine calcolare il quanto iniziale d'oscillazione da

$$n = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{1}{M_r} \left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0}$$

essendo $M_r = \frac{1}{2} M_{He} = 3,30 \cdot 10^{-24}$ la massa ridotta dell'oscillatore, e $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0$ la derivata seconda della curva potenziale nel punto di equilibrio.

Poichè il calcolo dà $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0 = 3,03 \cdot 10^8 \text{ erg./cm.}^2$ troviamo

$$n = 1610 \text{ cm.}^{-1}$$

in accordo casualmente perfetto con il valore determinato sperimentalmente ⁽²⁾, $n = 1628 \text{ cm.}^{-1}$, del primo quanto di oscillazione.

Ringrazio vivamente il Prof. E. Fermi che mi è stato largo di preziosi consigli e aiuti. Ringrazio anche il Dott. G. Gentile per l'interesse con cui ha seguito questo lavoro.

⁽¹⁾ W. E. CURTIS e A. HARVEY, loc. cit.

⁽²⁾ W. WEIZEL, « ZS. f. Phys. », 56, 727, 1929. W. E. CURTIS e A. HARVEY, loc. cit.

Fisica (Fisica teorica). — *Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno*. Nota di E. MAIORANA⁽¹⁾ presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Termini anomali con entrambi gli elettroni eccitati sono da lungo tempo conosciuti in atomi con due elettroni di valenza; notiamo in particolare i seguenti, che sono in parte ben noti in numerosi elementi neutri o ionizzati: $2p\ 2p\ ^3P_{0,1,2}$, $2p\ 2p\ ^1D$, $2p\ 2p\ ^1S$. Formalmente analogo a questi ultimi sarebbe, secondo una recente interpretazione⁽²⁾, il termine X della molecola di idrogeno, a cui spetterebbe precisamente la configurazione $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$. Ma l'analogia non sussiste nei riguardi energetici; mentre infatti negli atomi la frequenza della riga $2p\ 2p \rightarrow 1s\ 2p$ è dello stesso ordine di grandezza della frequenza $1s\ 2p \rightarrow 1s\ 2s$, al contrario il termine X è relativamente profondo, poco più alto del termine normale $1s\sigma\ 2p\sigma\ ^1\Sigma_u$ con cui dà intense combinazioni nell'ultra-rosso, ma il secondo a sua volta è assai più elevato dello stato fondamentale $(1s\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ (ca. 12 volt.); sorge di qua la difficoltà di giustificare in via teorica la anormale posizione energetica di detto termine anomalo e la sua stessa esistenza. A tale difficoltà Weizel ha cercato di ovviare con una valutazione problematica, fondata su dubbie analogie; noi abbiamo affrontato direttamente la questione, e i nostri calcoli sembrano confermare la presunzione di Weizel che esista un termine profondo $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$, benchè la distanza teorica di equilibrio dei nuclei si accordi meglio con il termine K (secondo Weizel $2p\sigma\ 3p\sigma\ ^1\Sigma_g$) che con il termine X.

Risulta peraltro che la qualifica di stato con due elettroni eccitati è puramente formale, e in realtà la designazione dei termini mediante gli stati dei singoli elettroni, se giova alla loro numerazione e al riconoscimento di quei caratteri di simmetria che non sono turbati dall'interazione, non permette da sola di trarre conclusioni attendibili sulla forma effettiva delle autofunzioni; le cose stanno qui ben diversamente che nel caso di campi centrali, dove è in generale possibile astrarre dall'interdipendenza dei movimenti degli elettroni (polarizzazione), senza perder di vista l'essenziale.

Il termine $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ di cui ci dobbiamo occupare si può pensare come parzialmente costituito dall'unione $H^+ + H^-$, il che non significa che sia un composto polare, poichè per l'uguaglianza dei costituenti il momento elettrico cambia segno con frequenza elevata (frequenza di scambio)

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) W. WEIZEL, « Zeitschr. f. Phys. », 65, 456, 1930.

e non è quindi osservabile; in questo senso parliamo di composto pseudopolare.

Tutto ciò vale soltanto in una rozza approssimazione e per una descrizione più accurata, benchè ancora assai schematica, è necessario considerare la reazione $H^+ + H^-$ insieme con l'altra $H + H$ che fu da sola esaminata da Heitler e London⁽¹⁾; limitandoci allora ai termini *pari* che ne risultano troviamo: 1) lo stato fondamentale $(1\sigma)^2 \Sigma_g$ in seconda approssimazione rispetto al metodo di Heitler e London; 2) lo stato anomalo $(2p\sigma)^2 \Sigma_g$. Il primo deriva prevalentemente da $H + H$, il secondo prevalentemente da $H^+ + H^-$.

1. Se si divide lo spazio delle configurazioni in quattro regioni *aa*, *ab*, *ba*, *bb*, secondo che ciascuno degli elettroni è più vicino al nucleo *a* o al nucleo *b*, e si prescinde per un momento dall'interazione, le quattro possibilità sono egualmente rappresentate nello stato $(2p\sigma)^2 \Sigma_g$ ma l'autofunzione è, ad es., positiva in *aa* e *bb*, negativa negli altri due casi; l'interazione accresce la probabilità di trovare il sistema di *aa* e *bb* e diminuisce quella di trovarlo in *ab* e *ba*. Si riconosce facilmente questo comportamento anormale osservando che lo stato $(2p\sigma)^2 \Sigma_g$ deve essere ortogonale allo stato fondamentale, e in questo, come la riconosciuta applicabilità del metodo di Heitler e London lascia presumere, sono rappresentati in modo preponderante, per nuclei sufficientemente lontani, le regioni *ab* e *ba*; possiamo quindi ritenere che con qualche approssimazione appartiene a $(2p\sigma)^2 \Sigma_g$ l'autofunzione di $H^- + H^+$ simmetrizzata nei nuclei; che tale approssimazione sia peraltro insufficiente s'immagina facilmente se si osserva che in tal modo le superficie nodali vanno interamente perdute. Queste ricompaiono se si include nel calcolo di perturbazione l'unione $H + H$ di due atomi neutri. Indicando con Φ_{12} e Ψ_{12} le autofunzioni elettroniche di H^- rispettivamente intorno al nucleo *a* e intorno al nucleo *b*, e con φ o ψ l'autofunzione dell'atomo neutro *a* o *b*, si possono costruire come combinazione delle configurazioni $H^- + H^+$, $H^+ + H^-$, $H + H$ (quest'ultima doppia per risonanza degli elettroni) due autofunzioni pari appartenenti al sistema dei singoletti:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = \Phi_{12} + \Psi_{12} \\ y_2 = \varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1. \end{cases}$$

Degli altri due stati che derivano dalle stesse configurazioni ed hanno simmetria differente non ci occupiamo; essi sono lo stato dispari dei tripletti $1\sigma 2p\sigma \Sigma_u$, instabile e già considerato da Heitler e London e, con qualche approssimazione, lo stato $1\sigma 2p\sigma \Sigma_u$ che appartiene ai singoletti ma è anch'esso dispari. Gli stati y_1 e y_2 dati da (1) non sono ortogonali, ma lo stato fondamentale $(1\sigma)^2 \Sigma_g$ e lo stato anomalo $(2p\sigma)^2 \Sigma_g$ devono risul-

(1) W. HEITLER e F. LONDON, «Zeitschr. f. Phys.», 44, 455, 1927.

tare da loro combinazioni ortogonali. L'equazione secolare per la determinazione degli autovalori si scrive:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} I_0 + I_1 - (1 + S) E & 2 M - 2 Q E \\ 2 M - 2 Q E & L_0 + L_1 - (1 + R) E \end{vmatrix}$$

essendo, se le autofunzioni sono reali:

$$(3) \quad \begin{cases} I_0 = \int \varphi_1 \psi_2 H \varphi_1 \psi_2 d\tau \\ I_1 = \int \varphi_2 \psi_1 H \varphi_1 \psi_2 d\tau \\ L_0 = \int \Phi_{12} H \Phi_{12} d\tau \\ L_1 = \int \Phi_{12} H \Psi_{12} d\tau \\ M = \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12} d\tau \\ S = \int \varphi_1 \psi_1 \varphi_2 \psi_2 d\tau \\ R = \int \Phi_{12} \Psi_{12} d\tau \\ Q = \int \varphi_1 \psi_2 \Phi_{12} d\tau \end{cases}$$

Se si assume come zero dell'energia quella, ad es., degli atomi neutri separati si può riguardare H come perturbazione; la differenza delle energie di $H^+ + H^-$ e $H + H$ figura allora naturalmente come perturbazione quando H è applicato a Φ_{12} o a Ψ_{12} .

2. Parte degli integrali (3) si trovano in Heitler e London⁽¹⁾ e Sugiura⁽²⁾; per valutare gli altri dobbiamo procurarci una espressione approssimata di Φ_{12} . Questa autofunzione, che descrive lo ione H^- , non è esattamente conosciuta, ma il suo autovalore, che è legato all'affinità elettronica dell'idrogeno, è stato calcolato con estrema precisione da vari autori⁽³⁾; questo semplifica la valutazione degli integrali (3) poichè H si riduce ad un operatore finito. Come espressione di Φ_{12} possiamo assumere con una certa approssimazione il prodotto $\Phi_1 \Phi_2$ di due autofunzioni dipendenti dai singoli elettroni; la soluzione migliore, nel senso della minima energia, è allora, come è noto, quella fornita dal metodo di Hartree, che nel nostro caso è con grande approssimazione:

$$\Phi_1 = \frac{c}{r_1} \left(e^{-0,29 \frac{r_1}{a_0}} - e^{-1,68 \frac{r_1}{a_0}} \right)$$

(1) W. HEITLER e F. LONDON, loc. cit.

(2) Y. SUGIURA, « Zeitschr. f. Phys. », 45, 484, 1927.

(3) H. BETHE, « Zeitschr. f. Phys. », 57, 815, 1929; E. A. HYLLEAAS, *ivi*, 60, 624, 1930; P. STARODUBROSKI, *ivi*, 65, 806, 1930.

è analogamente per Φ_2 , ma benchè sia possibile eseguire tutti i calcoli con questa autofunzione, la complicazione è eccessiva e abbiamo preferito l'espressione più semplice

$$\Phi_1 = c e^{-\frac{11}{16} \frac{r_1}{a_0}}$$

che è stata usata da Hylleraas nella sua teoria dell'idrite di litio solida (1). L'uso dell'autofunzione approssimata Φ_{12} e il modo convenzionale d'intendere $H \Phi_{12}$ fornisce per M due valori differenti:

$$M = \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12} d\tau \quad \text{e} \quad M = \int \Phi_{12} H \varphi_1 \psi_2 d\tau.$$

Abbiamo preferito la prima espressione che è più semplice e forse più esatta, ma come la seconda non si presta al calcolo, il controllo non ci è stato possibile, salvo che in casi limiti. Il più alto degli autovalori di (2) che appartiene a $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ diviene minimo a una distanza che male si accorda con la distanza d'equilibrio del termine X (circa 2 Å in luogo di 1,35), ma l'energia risulta allora di 7.5 volt al di sopra di quella degli atomi neutri separati e nello stato fondamentale, cioè circa 27000 cm^{-1} sotto il limite normale di H_2 (sperimentalmente per il termine X: 22000 cm^{-1}) e questo risultato è anche troppo favorevole, poichè per il metodo seguito era da aspettarsi un valore notevolmente minore del vero. Benchè non possiamo escludere in modo assoluto che l'interpretazione di Weizel sia falsa e che il termine $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, certamente stabile e relativamente profondo, non sia il termine X ma, o il termine K, o altro termine non ancora osservato, si può forse attribuire l'errore nella determinazione della posizione di equilibrio e il risultato troppo favorevole del calcolo dell'energia all'uso di una autofunzione poco corretta per H^- ; una valutazione quantitativa è difficile, ma sembra certo che quella approssimazione tende a produrre errori nel senso stesso delle divergenze constatate fra calcolo ed esperienza.

(1) E. A. HYLLEAAS, « Zeitschr. f. Phys. », 63, 771, 1930.

ATOMI ORIENTATI IN CAMPO MAGNETICO VARIABILE

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *L'autore calcola la probabilità che abbiano luogo processi non adiabatici quando un raggio di vapore orientato passa in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulla.*

Un atomo orientato in un campo magnetico lentamente variabile segue, come è noto, adiabaticamente la direzione, supposta variabile, del campo. A ciò si deve il fatto recentemente posto in evidenza che sottoponendo un raggio molecolare proveniente da una esperienza di STERN e GERLACH a una seconda esperienza di STERN e GERLACH non si ottiene una nuova divisione del raggio, perchè tutti gli atomi hanno la stessa orientazione, avendo seguito esattamente il campo vagante, difficilmente eliminabile, nel tratto compreso fra le espansioni polari destinate a produrre il raggio orientato e quelle che devono saggiarne l'orientazione dopo un certo percorso. Tuttavia PHIPPS ha intrapreso delle esperienze per rivelare una variazione non adiabatica del campo in detta regione; la condizione a ciò necessaria è che il campo sia sufficientemente debole e la variazione della sua direzione sufficientemente rapida perchè la sua frequenza di rotazione divenga comparabile con la frequenza di Larmor. Poichè è difficile abbassare l'intensità del campo al disotto di alcuni gauss ⁽¹⁾, è necessario, per una velocità del raggio di 10^5 cm./sec. che la direzione del campo, vari di molto entro una frazione di millimetro; si tratta quindi di esperienze delicate che non hanno dato finora esito conclusivo.

Il problema è stato trattato teoricamente da GÜTTINGER ⁽²⁾ per il caso di un campo rotante uniformemente e di intensità costante. In questa nota supporremo invece che il raggio molecolare passi in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulli; questo caso è particolarmente importante perchè se il raggio passasse esattamente

⁽¹⁾ T. E. PHIPPS e O. STERN, « ZS. f. Ph. », **73**, 185, 1932.

⁽²⁾ P. GÜTTINGER, « ZS. f. Ph. », **73**, 169, 1932.

per un punto di campo nullo tutti gli atomi invertirebbero la loro orientazione.

D'altra parte un punto di campo nullo non può essere portato sul percorso del raggio molecolare che per tentativi, disponendo, ad es., di due campi ausiliari ortogonali indipendentemente regolabili, così che è difficile realizzare l'esperienza fino a che non si disponga di mezzi rapidi per la rivelazione del raggio. Ne anticipiamo tuttavia la discussione anche per meglio chiarire la natura del problema dinamico offerto dalla rotazione di un atomo magnetico in campo comunque variabile. Risulterà da quanto segue che la trattazione del problema secondo la meccanica classica o secondo la meccanica quantistica richiede l'integrazione delle stesse equazioni differenziali, cosicché quando la soluzione classica è nota, come nel caso di un campo uniforme rotante con velocità angolare costante, particolarmente considerato da GÜTTINGER, la soluzione quantistica può esserne dedotta immediatamente. Per il problema che studieremo più avanti, passaggio in prossimità di un punto di campo nullo con gradiente di campo lentamente variabile, l'impostazione quantistica è matematicamente più conveniente; ma anche qui basta risolvere il caso più semplice, $j = 1/2$, per dedurne la soluzione generale.

1. Uno stato rotazionale di un atomo con quanto interno $j = 1/2$ può essere rappresentato come combinazione lineare dei due stati ortogonali $\psi_{\frac{1}{2}}$ e $\psi_{-\frac{1}{2}}$ aventi momento $\pm 1/2$ in direzione dell'asse z :

$$\psi = C_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}}$$

ed è essenzialmente definito dal rapporto $\frac{C_{-\frac{1}{2}}}{C_{\frac{1}{2}}}$.

Se le fasi di $\psi_{\frac{1}{2}}$ e $\psi_{-\frac{1}{2}}$ sono scelte in modo da dare la rappresentazione ordinaria dei momenti angolari, lo stato ψ può essere rappresentato, come è noto, in modo invariante da un punto P su una sfera unitaria, le cui coordinate sferiche ϑ, φ sono definite da

$$\text{tang } \frac{\vartheta}{z} e^{i\varphi} = \frac{C_{-\frac{1}{2}}}{C_{\frac{1}{2}}}$$

Il raggio vettore OP , essendo O il centro della sfera, dà allora la direzione secondo la quale il momento nello stato ψ ha il valore $1/2$. Nel caso $j = 1/2$ il più generico stato rotazionale corrisponde quindi

ad atomi orientati con momento $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ in una direzione arbitraria. La probabilità d'accordo fra due stati rappresentati dai punti P e P' è data da

$$W(P, P') = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

se α è l'angolo POP' ; essa si annulla, cioè i due stati sono ortogonali, quando P e P' sono diametralmente opposti. Per $j > 1/2$ non esiste in generale una direzione secondo cui l'atomo è orientato, ha cioè un valore determinato dal momento angolare, ma una rappresentazione geometrica intrinseca, simile alla precedente, è ancora possibile. Solo ogni stato sarà rappresentato da $2j$ punti sulla sfera unitaria, anzi che da uno solo. Consideriamo infatti uno stato generico:

$$\psi = C_j \psi_j + C_{j-1} \psi_{j-1} + \dots + C_{-j} \psi_{-j}$$

e siano $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2j}$ le radici dell'equazione:

$$(1) \quad a_0 \zeta^{2j} + a_1 \zeta^{2j-1} + \dots + a_{2j} = 0$$

essendo

$$(2) \quad a_r = (-1)^r \frac{C_{j-r}}{\sqrt{(2j-r)! r!}}$$

Lo stato ψ può allora essere rappresentato dai punti P_1, P_2, \dots, P_{2j} sulla sfera unitaria, le coordinate sferiche ϑ_s, φ_s di P_s essendo date da

$$(3) \quad \text{tang} \frac{\vartheta_s}{z} e^{i\varphi_s} = \zeta_s.$$

Si verifica senza difficoltà che questa rappresentazione geometrica non dipende dal sistema di coordinate. La disposizione dei punti rappresentativi è a priori arbitraria, ma diviene particolarmente semplice se si considerano atomi orientati. A uno stato orientato con componente del momento angolare m nella direzione OP corrispondono infatti $j+m$ punti coincidenti in P e $j-m$ nel punto diametralmente opposto a P , come se ognuno dei punti rappresentativi indicasse la direzione di un piccolo giroscopio con momento angolare $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. La probabilità di accordo fra due stati orientati, l'uno con momento m nella direzione OP , l'altro con momento m' nella direzione OP' formante con la prima l'angolo α , è data da

$$(4) \quad W(P, P'; m, m') = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{4j} (j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')! \\ \left[\sum_0^r \frac{(-1)^r \left(\text{tang} \frac{\alpha}{2} \right)^{2r-m+m'}}{r! (r-m+m')! (j+m-r)! (j-m'-r)!} \right]^2$$

ed è naturalmente simmetrica in m e m' .

Consideriamo ora la rotazione dell'atomo in un campo magnetico $H(t)$ comunque variabile nel tempo. Supponiamo perciò che l'atomo possieda un momento magnetico $-gj\mu_0$ così che per campo sufficientemente debole si può assumere come Hamiltoniana $g\mu_0(j, H)$. Le equazioni del movimento saranno allora:

$$\dot{C}_m = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[mH_z C_m + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \frac{H_x - iH_y}{2} C_{m-1} + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{H_x + iH_y}{2} C_{m+1} \right].$$

Sostituendo mediante (2) abbiamo

$$\dot{a}_r = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[(j-r)H_z a_r - (r+1) \frac{H_x - iH_y}{2} a_{r+1} - (2j-r+1) \frac{H_x + iH_y}{2} a_{r-1} \right].$$

Uguagliando a zero la derivata temporale del primo membro di (1) troviamo, dopo facili riduzioni, per una generica radice ζ_i di detta equazione:

$$\zeta_i = \frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left(H_z \zeta_i + \frac{H_x - iH_y}{2} \zeta_i^2 - \frac{H_x + iH_y}{2} \right)$$

da cui seguono mediante la (3) le variazioni temporali di ϑ_i, φ_i relative al punto rappresentativo P_i di cui ζ_i è la proiezione stereografica sul piano complesso $x + iy$:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_i &= \frac{2\pi}{h} g\mu_0 (H_y \cos \varphi_i - H_x \sin \varphi_i), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{2\pi}{h} g\mu_0 \left(H_z - \frac{H_x \cos \varphi_i + H_y \sin \varphi_i}{\text{tang } \vartheta_i} \right). \end{aligned}$$

Queste equazioni esprimono che ciascuno dei punti rappresentativi sulla sfera unitaria precede intorno al campo con frequenza $g \cdot 0$, essendo 0 la frequenza di LARMOR, come accadrebbe nella meccanica classica se uno qualsiasi dei raggi vettori OP_i indicasse la direzione di un giroscopio di autoimpulso $j \frac{h}{2\pi}$ e momento magnetico $-gj\mu_0$.

Si può del resto provare che la validità di questo risultato è implicita nell'invarianza della nostra rappresentazione geometrica, e viceversa.

Da quanto si è detto risulta anche che la posizione relativa dei $2j$ punti rappresentativi resta invariata nel corso del tempo, cosicché se inizialmente l'atomo è orientato con componente del momento angolare m in direzione del campo, esso sarà ancora orientato al tempo t con momento m secondo una direzione formante un angolo $\alpha(t)$ con

il campo. La conoscenza dell'angolo di sbandamento $\alpha(t)$, che può essere calcolato indifferentemente con la meccanica classica o con la meccanica quantistica ed è indipendente da j e da m permette di calcolare mediante la (4) la probabilità che la componente del momento angolare nella direzione del campo abbia al tempo t il valore generico m' .

2. Supponiamo ora che un raggio di atomi orientati passi in prossimità di un punto Q in cui $H_x = H_y = H_z = 0$; in vicinanza di Q le componenti del campo saranno funzioni lineari delle coordinate cartesiane x, y, z , e, in un sistema solidale con l'atomo in movimento, che con grande approssimazione possiamo ritenere rettilineo e uniforme, le componenti del campo agente sull'atomo stesso saranno funzioni lineari del tempo. Scegliamo l'asse x nella direzione che ha il campo quando esso raggiunge la minima intensità, ciò che accadrà in generale a non grande distanza da Q , e l'asse z nella direzione della derivata temporale, cambiata di segno, del campo magnetico, che è naturalmente normale alla precedente. Assumiamo inoltre come origine dei tempi, l'istante in cui il campo è minimo. Le componenti del campo a cui l'atomo è sottoposto in un istante generico avranno la forma:

$$H_x = A; \quad H_y = 0; \quad H_z = -Ct.$$

Supponiamo $j = 1/2$ ponendo $\psi = \xi\psi^{1/2} + \eta\psi^{-1/2}$; le equazioni del moto saranno

$$\dot{\xi} = -\frac{\pi i}{\hbar} g\mu_0 (-Ct\xi + A\eta),$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\pi i}{\hbar} g\mu_0 (A\xi + Ct\eta).$$

A fine di operare con variabili prive di dimensioni, introduciamo una nuova misura del tempo:

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi}{zh}} g\mu_0 C \cdot t$$

e la grandezza numerica

$$k = \frac{2\pi g\mu_0 A^2}{\hbar C}$$

che dà il rapporto fra la frequenza di precessione dell'atomo e la frequenza di rotazione della direzione del campo quando questo rapporto ha il valore minimo, cioè per $\tau = 0$. Se il raggio di vapore passa con velocità v a una distanza d dal punto Q , nelle cui vicinanze

regnano gradienti di campo dell'ordine di G gauss per cm., K risulterà dell'ordine di $10^7 G \frac{d^2}{v}$; per es., per $v=10^5$ e $G \approx 1$ sarà $k \approx 100d^2$ e così $k \approx 1$ per $d=1$ mm.. Nelle nuove variabili avremo:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= -i(-2\tau\xi + \sqrt{k}\eta) \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -i(\sqrt{k}\xi + 2\tau\eta)\end{aligned}$$

che possiamo semplificare con la posizione:

$$\xi = e^{i\tau^2} f; \quad \eta = e^{-i\tau^2} g$$

da cui segue:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{df}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{-2i\tau^2}g \\ \frac{dg}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{2i\tau^2}f. \end{cases}$$

Eliminando g troviamo:

$$(6) \quad \frac{d^2f}{d\tau^2} + h i \tau \frac{df}{d\tau} + kf = 0.$$

Delle soluzioni di questa equazione differenziale possiamo dare una rappresentazione integrale che permette di determinarne l'espressione asintotica per grandi valori, positivi o negativi, di τ ; questo è appunto quanto ci occorre, poichè noi supponiamo che per $\tau = -\infty$ l'atomo sia orientato rispetto al campo e vogliamo determinarne l'orientazione per $\tau \rightarrow \infty$.

Poichè tutto si riduce a calcolare l'angolo α più sopra definito, basta considerare una sola soluzione della (6). Essa ci è data da

$$f(\tau) = \frac{\sqrt{k} e^{-\frac{k\pi}{8}}}{2(1+i)\sqrt{\pi}} \int s^{\frac{k}{4i}-1} e^{\frac{s^2}{8i} + s\tau} ds$$

log s avendo il suo valore principale e la condizione ai limiti

$$\left| s^{\frac{k}{4i}} e^{\frac{s^2}{8i} + s\tau} \right|_c = 0$$

essendo soddisfatta se il cammino di integrazione ha la forma indicata nella figura, dove si sono distinti i due casi $\tau < 0$ e $\tau > 0$.

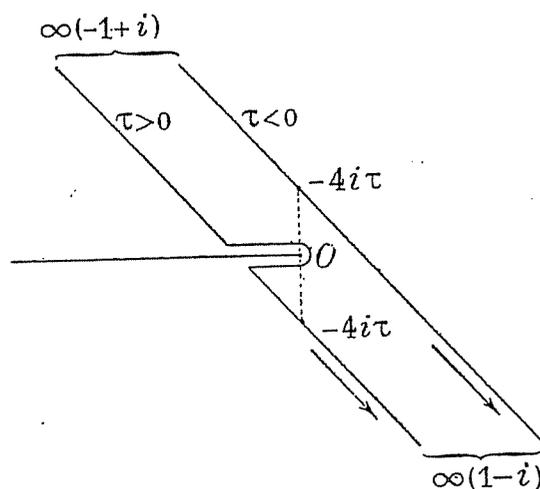
La parte negativa dell'asse reale è linea di discontinuità nella funzione integranda e non può essere attraversata; inoltre, a fine di permettere la valutazione delle espressioni asintotiche i cammini

di integrazione si sono fatti passare per il punto di sella $s = -4i\tau$ nella direzione della massima pendenza.

Per $\tau \rightarrow -\infty$ tutto l'integrale proviene dalle vicinanze del punto $s = -4i\tau$ e mediante la sostituzione

$$s = -4i\tau + (1-i)p$$

si calcolano facilmente i primi termini dello sviluppo asintotico di f



e, attraverso la prima delle (5), di g . Si trova, trascurando termini che tendono a zero:

$$\tau \rightarrow -\infty; \quad f = 0; \quad g = (-4\tau)^{\frac{k}{4i}}.$$

Per $\tau \rightarrow \infty$ l'espressione asintotica dell'integrale proviene in parte dalle vicinanze del punto di sella $s = -4i\tau$ e in parte da quelle del punto di diramazione O . Si trova in questo caso:

$$\tau \rightarrow \infty: \quad f = -\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{k} e^{-\frac{k}{4i}} e^{-\frac{k\pi}{8}} \sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{4i}\right)$$

$$g = (4\tau)^{\frac{k}{4i}} e^{-\frac{k\pi}{4}}.$$

Badando che per a reale ⁽¹⁾

$$|\Gamma(ai)| = \sqrt{\frac{\pi}{a \sinh(\pi a)}}$$

oppure tenendo presente la costanza di $|f^2| + |g^2|$ troviamo le se-

(1) V., p. es., WHITTAKER e WATSON, *Modern Analysis*, IV ed., p. 259.

genti espressioni per $|f|$ e $|g|$:

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow -\infty : & \quad |f| = 0; \quad |g| = 1 \\ \tau \rightarrow \infty : & \quad |f| = \sqrt{1 - e^{-\frac{k\pi}{2}}}; \quad |g| = e^{-\frac{k\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Per $\tau \rightarrow -\infty$ il campo è diretto secondo l'asse z , cosicchè all'inizio del fenomeno l'atomo ha nella direzione del campo il momento $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$; per $\tau \rightarrow \infty$ il campo è diretto invece secondo $-z$ e il valore limite di $|g|^2$ segna quindi la probabilità che l'atomo inverta la propria orientazione, si trovi cioè ad avere, dopo essere passato nelle vicinanze di Q , un momento $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ nella direzione del campo. Tale probabilità è quindi

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{k\pi}{2}}.$$

Così per $K = 1$ il 21 % e per $K = 2$ il 4,3 % degli atomi si capovolgono.

La soluzione generale del problema per j qualsiasi e transizioni da m a m' si avrà dalla (4) sostituendovi il valore dell'angolo α di sbandamento. E poichè nel nostro caso

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

risulta confrontando con l'espressione precedente

$$\alpha = 2 \arcsin e^{-\frac{k\pi}{4}}.$$

TEORIA RELATIVISTICA DI PARTICELLE CON MOMENTO INTRINSECO ARBITRARIO

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *L'autore stabilisce equazioni d'onda lineari nell'energia e relativisticamente invarianti per particelle aventi momento angolare intrinseco comunque prefissato.*

La teoria di DIRAC dell'elettrone fa uso, come è noto, di una funzione d'onda a quattro componenti delle quali, quando si considerino movimenti lenti, due hanno valori trascurabili mentre le altre due obbediscono in prima approssimazione all'equazione di SCHRÖDINGER.

In modo analogo una particella con momento angolare intrinseco $s \frac{h}{2\pi}$ ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) è descritta nella meccanica quantistica mediante un complesso di $2s + 1$ funzioni d'onda che soddisfano separatamente all'equazione di SCHRÖDINGER. Tale rappresentazione è naturalmente valida finchè si trascurano gli effetti relativistici, e ciò è lecito per particelle mobili con velocità piccola di fronte a quella della luce. Un altro caso in cui la teoria elementare è ancora utilizzabile è ovviamente quello in cui la velocità della particella pur essendo comparabile con c rimane quasi costante in direzione e grandezza, poichè allora è possibile ricondursi allo studio di movimenti lenti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento.

Il caso invece in cui la velocità delle particelle pur essendo quasi costante entro regioni sufficientemente estese del continuo spazio-tempo varia da una regione all'altra lentamente ma fra valori estremi lontani, sotto l'azione di campi esterni deboli, non si lascia trattare immediatamente con l'equazione non relativistica di SCHRÖDINGER.

Una generalizzazione relativistica della teoria precedente deve soddisfare successivamente alle condizioni seguenti al crescere del suo grado di accuratezza:

(a) La teoria permette lo studio di particelle aventi velocità quasi determinata in grandezza e direzione, dando risultati equi-

valenti alla teoria non relativistica, senza tuttavia la necessità di scegliere un sistema particolare di riferimento.

(b) La teoria permette inoltre di studiare processi in cui la velocità delle particelle varia lentamente, ma entro limiti comunque estesi, per l'azione di campi esterni deboli.

(c) La teoria è valida in generale comunque indeterminata sia la velocità delle particelle.

È probabile che una teoria rigorosa soddisfacente alla condizione (c) sia incompatibile con il mantenimento dell'attuale schema quantistico. La teoria di DIRAC dell'elettrone che pure ha dimostrato la sua fecondità nello studio di fenomeni schiettamente relativistici come la diffusione di raggi γ duri, soddisfa certo imperfettamente alla (c), come prova la nota difficoltà delle transizioni a stati di energia negativa. Al contrario è verosimile che una teoria soddisfacente a (b) e solo parzialmente a (c) non urti in difficoltà sostanziali, il suo contenuto fisico potendo essere essenzialmente quello stesso che giustifica l'equazione di SCHRÖDINGER. L'esempio più notevole di tali generalizzazioni relativistiche ci è dato appunto dalla teoria di DIRAC, ma poichè questa è applicabile soltanto a particelle

con momento intrinseco $s = \frac{1}{2}$, ho cercato equazioni analoghe nella forma a quelle di DIRAC, sebbene alquanto più complicate, le quali permettono la considerazione di particelle con momento angolare arbitrario, e in particolare nullo.

L'equazione d'onda, in assenza di campo, di una particella materiale, deve avere secondo DIRAC la forma:

$$(1) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0.$$

Equazioni di questo tipo presentano una difficoltà di principio. L'operatore β^{-1} deve infatti trasformarsi come la componente temporale di un quadrivettore e così β non può essere semplicemente multiplo della matrice unità ma deve avere almeno due autovalori differenti, supponiamo β_1 e β_2 ; ma da ciò segue che l'energia di riposo della particella, che si ottiene da (1) ponendo $p = 0$ deve avere almeno due valori differenti, cioè $\beta_1 mc^2$ e $\beta_2 mc^2$. Secondo le equazioni di DIRAC i valori possibili della massa di riposo sono, come è noto, $+m$ e $-m$ dal che segue per l'invarianza relativistica che l'energia può avere due valori differenti per il segno per ogni valore di p : $W = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$.

L'indeterminazione nel segno dell'energia può essere in realtà superata, usando equazioni del tipo fondamentale (1), solo se la

funzione d'onda ha infinite componenti che *non* si lasciano spezzare in tensori o spinori finiti.

1. L'equazione (1) può essere dedotta dal principio variazionale

$$(2) \quad \delta \int \tilde{\Psi} \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi dV dt = 0.$$

Una delle condizioni dell'invarianza relativistica è ovviamente che sia invariante la forma $\tilde{\Psi}\beta\psi$.

Se ora vogliamo che l'energia di riposo risulti sempre positiva, gli autovalori di β devono essere tutti positivi e la forma $\tilde{\Psi}\beta\psi$ sarà definita positiva. È allora possibile mediante una trasformazione *non* unitaria $\psi \rightarrow \varphi$ ridurre detta forma alla forma unità:

$$(3) \quad \tilde{\Psi}\beta\psi = \tilde{\varphi}\varphi.$$

Sostituendo in (2) a ψ la sua espressione mediante φ si avrà

$$(4) \quad \delta \int \tilde{\varphi} \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi dV dt = 0,$$

da cui seguono le equazioni equivalenti alla (1):

$$(5) \quad \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi = 0.$$

Dobbiamo ora determinare la legge di trasformazione di φ di fronte una rotazione di LORENTZ e l'espressione delle matrici γ_0 , γ_x , γ_y , γ_z in modo che sia rispettata l'invarianza relativistica del principio variazionale (4) e quindi che sia ivi invariante la funzione integranda.

Cominciamo con lo stabilire la legge di trasformazione di φ osservando anzitutto che l'invarianza di $\tilde{\varphi}\varphi$ significa che dobbiamo considerare solo trasformazioni unitarie. Per evitare complicazioni esagerate diamo inoltre la legge di trasformazione solo per trasformazioni di LORENTZ infinitamente piccole, una trasformazione finita potendo ottenersi per integrazione di quelle. Introduciamo le trasformazioni infinitesime nelle variabili ct, x, y, z :

$$(6) \quad \left(\begin{array}{l} S_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ T_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

e poniamo

$$(7) \quad \begin{cases} a_x = iS_x; & a_y = iS_y; & a_z = iS_z \\ b_x = -iT_x; & b_y = -iT_y; & b_z = -iT_z. \end{cases}$$

Gli operatori a e b devono essere Hermitiani in una rappresentazione unitaria, e viceversa; inoltre perchè le trasformazioni infinitesime siano integrabili devono soddisfare a certe relazioni di scambio che si deducono da (6) e (7):

$$(8) \quad \begin{cases} (a_x, a_y) = ia_z \\ (a_x, b_x) = 0 \\ (a_x, b_y) = ib_z \\ (a_x, b_z) = -ib_y \\ (b_x, b_y) = -ia_z \end{cases}$$

e le altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z .

La più semplice soluzione delle (8) mediante operatori Hermitiani è data dalle seguenti matrici infinite in cui gli elementi diagonali sono numerati con due indici j e m e bisogna distinguere due possibilità, secondo che si faccia $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots; m = j, j-1, \dots, -j$, oppure $j = 0, 1, 2, \dots; m = j, j-1, \dots, -j$:

$$(9) \quad \begin{cases} (j, m | a_x - ia_y | j, m+1) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \\ (j, m | a_x + ia_y | j, m-1) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ (j, m | a_z | j, m) = m \\ (j, m | b_x - ib_y | j+1, m+1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \\ (j, m | b_x - ib_y | j-1, m+1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j+1, m-1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j-1, m-1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\ (j, m | b_z | j+1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} \\ (j, m | b_z | j-1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j-m)}. \end{cases}$$

Se assumiamo che per riflessione nell'origine le φ_j, m restano

inalterate o cambiano segno alternativamente al variare di j , b risulta un vettore polare, mentre a è un valore assiale.

Chiameremo le grandezze su cui operano a e b tensori o spinori infiniti di indice zero secondo che j è intero o mezzo. La denominazione « di indice zero » significa che è nullo l'invariante:

$$(10) \quad Z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Spinori o tensori infiniti più generali possono definirsi per qualunque valore di Z . Gli spinori possono essere ottenuti semplicemente nel modo seguente. Si consideri una soluzione generica $\psi(q, t)$ delle equazioni di DIRAC senza campo e la si assoggetti a una trasformazione relativistica:

$$(11) \quad \psi(q, t) \rightarrow \psi'(q, t).$$

Allora la trasformazione nello spazio:

$$(12) \quad \psi(q, 0) \rightarrow \psi'(q, 0)$$

è unitaria, e se invece di funzioni arbitrarie $\psi(q, 0)$ consideriamo solo quelle che appartengono a un determinato autovalore z_0 dell'operatore (10), che ha uno spettro continuo che si estende da $-\infty$ a $+\infty$, noi troviamo funzioni che si trasformano mediante (12) come spinori infiniti, ognuno di questi ottenendosi esattamente due volte.

Gli operatori a_x e b_x hanno nella rappresentazione (12) la forma:

$$a_x = \frac{2\pi}{h} (yp_x - zp_y) + \frac{1}{2} \sigma_x$$

$$b_x = \frac{2\pi}{h} x \frac{H}{c} + \frac{i}{2} \alpha_x$$

e analogamente a_y , a_z , b_y , b_z .

2. Dobbiamo ora determinare gli operatori γ_0 , γ_x , γ_y , γ_z in modo che (4) sia invariante. Poichè consideriamo solo trasformazioni unitarie, detti operatori si trasformano come le forme Hermitiane ad essi collegate ed è quindi necessario per l'invarianza della funzione integranda in (4) che essi costituiscano un vettore covariante ($\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \propto ct, -x, -y, -z$).

È ovvia l'interpretazione di $\tilde{\varphi} \gamma_0 \varphi$ e $-\tilde{\varphi} \gamma \varphi$ come densità di carica e di corrente. Gli operatori γ devono soddisfare alle relazioni di

scambio :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_0, a_x) = 0 \\ (\gamma_0, b_x) = i\gamma_x \\ (\gamma_x, a_x) = 0 \\ (\gamma_x, a_y) = i\gamma_z \\ (\gamma_x, a_z) = -i\gamma_y \\ (\gamma_x, b_x) = i\gamma_0 \\ (\gamma_x, b_y) = 0 \\ (\gamma_x, b_z) = 0 \end{array} \right.$$

e alle altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z .
Le relazioni di scambio (13) determinano, come è facile dimostrare,
 $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ a meno di un fattore costante. Si trova

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = j + \frac{1}{2} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j+1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j-1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j+1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j-1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\ (j, m | \gamma_z | j+1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} \\ (j, m | \gamma_z | j-1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j-m)}. \end{array} \right.$$

Le componenti non indicate di $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ essendo nulle. Si noti che la forma Hermitiana $\varphi \gamma_0 \varphi$ è definita positiva come richiede l'interpretazione fisica.

Vogliamo ora passare dalle equazioni scritte nella forma (5) alle equazioni (1). Basta per ciò porre

$$(15) \quad \varphi_{j, m} = \frac{\psi_{j, m}}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}}$$

poichè allora la forma collegata a γ_0 si riduce alla forma unità. Otteniamo così equazioni della forma desiderata

$$(16) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0$$

in cui $\beta = \frac{1}{j + \frac{1}{2}}$ mentre le componenti diverse da zero di $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

sono date da

$$(17) \left\{ \begin{aligned} (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j + 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j + m + 2)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j - 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m)(j - m - 1)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j + 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m + 1)(j - m + 2)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j - 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j + m - 1)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_z | j + 1, m) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j - m + 1)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_z | j - 1, m) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j - m)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \end{aligned} \right.$$

Quando si cercano le soluzioni di (16) corrispondenti a onde piane con massa positiva si trovano tutte quelle che derivano per trasformazione relativistica dalle onde di momento nullo. Per queste l'energia è data da

$$(18) \quad W_0 = \frac{mc^2}{j + \frac{1}{2}}$$

Abbiamo così per valori mezzi di j stati corrispondenti a valori della massa: $m, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \dots$, e per j intero: $2m, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{5}, \dots$

È da notare che particelle con massa differente hanno momento angolare intrinseco differente, il momento angolare intrinseco avendo un valore determinato solo nel sistema in cui le particelle sono in riposo.

Se si considera il complesso degli stati appartenenti al valore

$\frac{m}{s + \frac{1}{2}}$ della massa di riposo come realizzato in natura, tutti gli altri stati non avendo significato, otteniamo una teoria invariante di particelle con momento angolare s che in assenza di campo può riguardarsi come soddisfacente. Si verifica senza difficoltà che per movimenti lenti e particelle di momento intrinseco s solo le $\psi_{s,m}$ sono sensibilmente diverse da zero e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER con il valore $M = \frac{m}{s + \frac{1}{2}}$ della massa, mentre le $\psi_{s+1,m}$ e $\psi_{s-1,m}$ sono dell'ordine di $\frac{v}{c}$, le $\psi_{s+2,m}$ e $\psi_{s-2,m}$ dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, e così via.

Otteniamo così solo due equazioni d'onda di cui l'una è adatta per la descrizione di particelle con momento angolare non intero e l'altra per particelle senza momento angolare o con momento intero.

Oltre agli stati appartenenti a valori positivi della massa, ve ne sono altri in cui l'energia è legata al momento da una relazione del tipo

$$(19) \quad W = \pm \sqrt{c^2 p^2 - k^2 c^4}$$

e ne esistono per tutti i valori positivi di k ma solo per $p \geq kc$.

Questi stati possono riguardarsi come appartenenti al valore immaginario ik della massa.

Le funzioni di « spin » appartenenti a onde piane con $p \neq 0$ hanno un'espressione particolarmente semplice nel caso di particelle senza momento intrinseco se $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$.

Per queste si trova a meno di un fattore di normalizzazione

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_{j,0} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right) \left(i \frac{\eta - j}{\varepsilon}\right)^j} \\ \psi_{j,m} = 0 \quad \text{per } m \neq 0 \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

essendo

$$(21) \quad \varepsilon = \frac{p}{Mc}, \quad \eta = \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{Mc}$$

e $M = 2m$ la massa di riposo.

3. Vogliamo ora considerare brevemente l'introduzione del campo elettromagnetico nell'equazione (16).

Il passaggio dalle equazioni senza campo alle equazioni con campo esterno avviene nel modo più semplice sostituendo a W e p , $W - e\varphi$ e $p - \frac{e}{c} A$, se e è la carica della particella e φ e A i potenziali scalare e vettore. Ma altre possibilità sono aperte. Possiamo ad es. aggiungere dei termini invarianti, analoghi a quelli introdotti da PAULI (1) nella teoria del neutrone magnetico, che portano a fattore le forze del campo in luogo dei potenziali elettromagnetici così da non turbare l'invarianza delle equazioni di fronte all'indeterminazione dei potenziali.

Tale artificio permette di attribuire a particelle con momento angolare non nullo un momento magnetico comunque prefissato. Nel caso dell'elettrone per es. si trova mediante la semplice sostituzione $W, p \rightarrow W - e\varphi, p - \frac{e}{c} A$ un momento magnetico $+\frac{1}{2}\mu_0$ in luogo di $-\mu_0$.

Se si vuole specializzare la nostra teoria in una teoria dell'elettrone che si accordi fin dove è possibile con i dati sperimentali dobbiamo quindi modificare il momento magnetico con termini aggiunti. Ma la teoria dell'elettrone così ottenuta è un doppione inutile della teoria di DIRAC che resta assolutamente da preferire in grazia della sua semplicità e del largo suffragio dell'esperienza. Il vantaggio della presente teoria è per contro la sua applicabilità a particelle con momento angolare differente da $\frac{1}{2}$.

Le equazioni con il campo e termini aggiunti per modificare il momento magnetico intrinseco hanno la forma

$$(22) \quad \left[\left(\frac{W}{c} - \frac{e}{c} \varphi \right) + \left(a, p - \frac{e}{c} A \right) - \beta mc + \lambda(a', H) + \lambda(b', E) \right] \psi = 0$$

in cui a' sta per (a_x', a_y', a_z') e b' per (b_x', b_y', b_z') mentre E e H rappresentano il campo elettrico e magnetico.

La matrice a'_x si deduce da a_x (9), mediante la regola

$$(23) \quad (j, m | a'_x | j', m') = \frac{1}{\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j' + \frac{1}{2}\right)}} (j, m | a_x | j', m')$$

e analogamente a'_y, a'_z, b'_y, b'_z .

(1) Citato da OPPENHEIMER, « Phys. R. » **41**, 763, 1932.

Per particelle con momento angolare intrinseco $s = \frac{1}{2}$ si deve porre $\lambda = \frac{2}{c} \mu$ se μ è il momento magnetico che si vuole aggiungere a quello che sorge naturalmente dall'introduzione dei potenziali elettromagnetici nell'equazione d'onda. Quest'ultimo vale in tal caso, come si è detto, $-\frac{1}{2} \frac{eh}{4\pi mc}$. Per particelle senza momento angolare intrinseco è naturale porre $\lambda = 0$.

Per quanto riguarda la soluzione pratica dell'equazione d'onda ricordiamo che per movimenti lenti sono finite e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER solo le $\psi_{j,m}$ per il valore di j che misura il momento angolare intrinseco in unità $\frac{h}{2\pi}$.

Per particelle senza momento, ad es. si ha una sola componente grande e cioè $\psi_{0,0}$, mentre le $\psi_{1,m}$ sono dell'ordine di $\frac{v}{c}$, se v è la velocità della particella, le $\psi_{2,m}$ dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$ e così via. Si riesce così a eliminare per successive approssimazioni le componenti piccole e in particolare si giunge a espressioni molto semplici per il calcolo della prima correzione relativistica.

Ringrazio particolarmente il Prof. E. FERMI per la discussione della presente teoria.

Über die Kerntheorie.

Von Ettore Majorana, zur Zeit in Leipzig.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 3. März 1933.)

Es wird eine Neubegründung der Heisenbergschen Kerntheorie diskutiert, die zu einer etwas abweichenden Hamiltonfunktion führt. Dementsprechend wird eine statistische Behandlung der Kerne entwickelt.

Die Entdeckung des Neutrons, d. h. eines schweren und ladungslosen Elementarteilchens, hat die Möglichkeit geboten, eine Kerntheorie aufzubauen, die, ohne allerdings die grundsätzlichen mit dem β -Zerfall verbundenen Schwierigkeiten aufzulösen, wohl aber die Begriffe der Quantenmechanik in einem Bereich zu benutzen gestattet, der geschlossen schien. Nach Heisenberg¹⁾ ist es möglich, für viele Zwecke die Kerne als aus Protonen und Neutronen bestehend, d. h. aus Teilchen mit fast der gleichen Masse, die den Drehimpuls $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ haben und der Fermischen Statistik gehorchen, zu betrachten. Das Studium der Kerne ist also zurückgeführt auf die Aufsuchung einer geeigneten Hamiltonfunktion, die für ein solches System materieller Punkte gültig sei, und zwar in nichtrelativistischer Näherung, da die Geschwindigkeiten der Teilchen vermutlich ziemlich klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind ($v \sim \frac{c}{10}$). Um eine zweckmäßige Wechselwirkung zwischen den Bausteinen der Kerne aufzustellen, hat sich Heisenberg von einer offenbaren Analogie leiten lassen. Das Neutron wird als aus einem Proton und einem Elektron bestehend, also wie ein nach einem den jetzigen Theorien unzugänglichen Prozeß konzentriertes Wasserstoffatom gedacht und zwar so, daß es seine statistische Eigenschaften und seinen Drehimpuls verändere. Heisenberg nimmt nun an, daß zwischen Protonen und Neutronen Austauschkräfte wirken denjenigen ähnlich, die für die Molekularbindung von H und H⁺ vor allem verantwortlich sind. Zu einer solchen Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen, die als maßgebend für die Kernstabilität betrachtet wird, fügen sich die Coulombabstoßungskräfte zwischen Protonen, Anziehungskräfte vom van der Waals-Typus zwischen Neutronen und eine Art von „elektrostatischer“ Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen²⁾.

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 77, 1, 1932; 78, 156, 1933.

²⁾ W. Heisenberg, ebenda 80, 587, 1933.

Man kann natürlich an der Gültigkeit dieser Analogie zweifeln, denn einerseits gibt die Theorie keine Auskunft über die innere Struktur des Neutrons, andererseits scheint die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton groß im Vergleich zum Massendefekt des Neutrons, wie er von Chadwick bestimmt worden ist, zu sein. Ich glaube also, es sei nicht ohne Interesse zu zeigen, wie man zur Aufstellung einer der von Heisenberg betrachteten sehr ähnlichen Hamiltonfunktion gelangen kann, wenn man nur die allgemeinsten und offenbarsten Kerneigenschaften am einfachsten wiedergeben will. Wir werden dafür ein statistisches Verfahren zu benutzen haben, an dessen Zulässigkeit für Größenordnungsbestimmungen kaum zu zweifeln ist. Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, daß infolge des von mir festgelegten Kriteriums für die Auswahl der Hamiltonfunktion jetzt die Austauschkräfte das umgekehrte Vorzeichen wie in der Heisenbergschen Theorie haben, daher sind die Symmetriecharaktere der Eigenfunktionen, die zum Normalzustand gehören, und die ganze statistische Behandlung verschieden von der in Heisenbergs Arbeit.

1. Die ziemlich zahlreichen Auskunftquellen, die wir über die Kernstruktur besitzen, d. h. radioaktive Zerfälle, künstliche Zerfälle und Anregungen, anomale Streuung von α -Teilchen, Massendefektmessungen usw., scheinen einstimmig darauf hinzudeuten, daß den Kernen keine stark unitäre, den Atomen ähnliche Organisation zuzuschreiben ist. In Gegenteil sieht es so aus, als ob die Kerne aus ziemlich unabhängigen Konstituenten bestehen, die nur bei unmittelbarer Berührung aufeinander wirken. Man findet so im Zentrum des Atoms eine Art von Materie wieder, die mit denselben Eigenschaften von Ausdehnung und Undurchdringlichkeit versehen ist wie die makroskopische Materie. Aus einer solchen Materie sind die leichten und schweren Kerne ebenfalls konstituiert und der Unterschied zwischen den einen und den anderen hängt vor allem von ihrem verschiedenen Inhalt von „Kernmaterie“ ab. Eine solche Vorstellung kann natürlich nur richtig sein, wenn die Coulombabstoßung zwischen den positiven Konstituenten der Kerne keine sehr große Rolle spielt; das ist sicher der Fall für ziemlich leichte Kerne; für die schwereren Kerne muß infolgedessen eine gewisse Korrektur eingeführt werden.

Nehmen wir nach dem oben Gesagten an, daß die Kerne aus Protonen und Neutronen bestehen, so ist unser Problem, das einfachste Wechselwirkungsgesetz zwischen diesen Teilchen, aufzustellen, welches, sofern die elektrostatische Abstoßung vernachlässigbar ist, zur Definition einer undurchdringlichen Materie führt. Es handelt sich eigentlich darum, drei

Wechselwirkungsgesetze aufzustellen, und zwar zwischen Protonen, zwischen Protonen und Neutronen und zwischen Neutronen. Wir werden aber der Einfachheit halber annehmen, daß zwischen jedem Paar von Protonen nur die Coulombsche Kraft wirke; diese Annahme kann sich darauf einigermaßen stützen, daß der klassische Radius der Protonen viel kleiner als der mittlere Abstand der Teilchen innerhalb des Kernes ist. Ferner kommt der Coulombschen Kraft keine große Wichtigkeit für leichte Kerne zu, und da diese aus beinahe ebensovielen Neutronen wie Protonen bestehen, liegt es nahe, als wichtigste Ursache der Kernstabilität eine besondere Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen zu betrachten; zwischen den Neutronen aber nehmen wir an, daß keine merkliche Wechselwirkung sich abspiele, da kein sicherer Grund für das Gegenteil vorliegt. Also müssen wir nunmehr nur eine geeignete Kopplung zwischen Protonen und Neutronen aufstellen. Infolge der schon hervorgehobenen, scheinbaren Ähnlichkeit zwischen der Kernstruktur und derjenigen der festen Körper oder der Flüssigkeiten könnte es plausibel scheinen, eine Wechselwirkung von demselben Typus wie für Atome und Moleküle, d. h. Anziehungskräfte bei großem Abstand und stark abstoßende Kräfte bei kleinem Abstand festzulegen, so daß die „Undurchdringlichkeit“ der Teilchen gesichert ist (siehe Fig. 1). Außerdem müßte man aber noch Abstoßungskräfte zwischen Neutronen bei



Fig. 1.
Potentielle Energie
zwischen zwei Atomen.

kleiner Entfernung annehmen, um die gewünschte Proportionalität zwischen Teilchenzahl und Kernvolumen zu erhalten. Eine solche Lösung des Problems ist aber vom ästhetischen Standpunkt aus unbefriedigend, denn man muß nicht nur Anziehungskräfte von unbekanntem Ursprung zwischen den Elementarteilchen annehmen sondern noch, bei kleinem Abstand, Abstoßungskräfte von ungeheurer Größenordnung, die von einem Potential von etwa einigen hundert Millionen Volt abhängen. Wir wollen deshalb einen anderen Weg einschlagen, mit Einführung von so wenigen willkürlichen Elementen, wie es möglich ist. Die Hauptschwierigkeit, die zu überwinden ist, besteht in der Frage, wie man zu einer von der Masse des Kernes unabhängigen Dichte gelangen kann, ohne die freie Beweglichkeit der Teilchen durch eine künstliche Undurchdringlichkeit zu hindern. Wir dürfen z. B. nach einem Typus von Wechselwirkung suchen, bei dem die mittlere Energie pro Teilchen nie eine gewisse Grenze überschreiten kann, wie groß auch die Dichte sein mag; das könnte eintreten infolge irgendeiner Absättigungserscheinung, die der Valenzsättigung einigermaßen analog sein dürfte. Eine solche Wechselwirkung zwischen Neutronen

und Protonen wird, wie wir beweisen werden, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(Q', q' | J | Q'', q'') = -\delta(q' - Q'') \delta(q'' - Q') J(r). \quad (1)$$

Hierbei ist $r = |q' - Q'|$ gesetzt worden und Q und q sind die Koordinaten eines Neutrons bzw. eines Protons. Die Funktion $J(r)$ ist positiv und sie darf den in Fig. 2 bezeichneten Gang aufweisen. Der Ausdruck (1) bedeutet, daß zwischen dem Neutron und dem Proton Anziehung bzw. Abstoßung stattfindet, je nachdem die Wellenfunktion ungefähr symmetrisch oder antisymmetrisch in den beiden Teilchen ist. Um der besonderen Stabilität des α -Teilchens Rechnung zu tragen, werden wir noch annehmen, daß Q und q in (1) nur die Schwerpunktskoordinaten mit Ausschließung des Spins sein sollen. So erhält man, daß auf jedes Proton im α -Teilchen beide Neutronen statt eins wirken und umgekehrt, da wir eine symmetrische Funktion in den Schwerpunktskoordinaten aller Protonen und Neutronen (was streng bei Vernachlässigung der Coulombschen Energie der Protonen

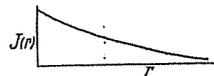


Fig. 2.
Gang der Resonanzkräfte.

gilt) annehmen können. Im α -Teilchen sind alle vorhandenen vier Partikel in demselben Zustand, so daß es eine abgeschlossene Schale in höherem Sinne als das Heliumatom ist. Geht man vom α -Teilchen zu schwereren Kernen über, so kann man nicht mehr, wegen des Pauliverbotes, weitere Teilchen in demselben Zustand ansetzen, und da außerdem die Austauschenergie (1) nur dann im allgemeinen groß ist, wenn Proton und Neutron sich in demselben Zustand befinden, muß man erwarten, was genau der Erfahrung entspricht, daß bei schweren Kernen der Massendefekt pro Partikel nicht wesentlich größer als beim α -Teilchen sein dürfte.

Wir wollen jetzt den Ausdruck (1) der Wechselwirkungsenergie zwischen Proton und Neutron mit demjenigen vergleichen, den man aus dem Resonanzglied der Heisenbergschen Hamiltonfunktion herleiten kann, wenn man durch Betrachtung der Neutronen und Protonen als verschiedener Teilchen die unbequeme g -Spinkoordinate eliminiert. Dann findet man einen zu (1) ähnlichen Ausdruck, aber mit zwei grundsätzlichen Unterschieden. Erstens nach Heisenbergschem Ausdruck sollen Q und q in (1) alle Koordinaten einschließlich des Spins bezeichnen. Zweitens nimmt Heisenberg für die Resonanzkräfte das umgekehrte Vorzeichen an, was für die statistischen Folgen am wichtigsten ist, denn infolgedessen sind die Symmetriecharakter der Eigenfunktionen bei der Heisenbergschen Theorie solche, daß keine Absättigung stattfindet und noch Abstoßungs-

kräfte bei kleinen Entfernungen notwendig sind¹⁾. Wir werden jetzt näher untersuchen, in welcher Weise diejenige Absättigung eintritt, die zur experimentellen Erscheinung der Undurchdringlichkeit der Kernkonstituenten führt.

2. In erster Näherung betrachten wir die Eigenfunktion des Kernes als durch ein Produkt zweier Funktionen darstellbar, die von den Koordinaten der n_1 , Neutronen, bzw. der n_2 , Protonen, abhängen:

$$\psi = \psi_N(Q_1, \Sigma_1, \dots, Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}) \psi_P(q_1, \sigma_1, \dots, q_{n_2}, \sigma_{n_2}) \quad (2)$$

und denken wir uns ψ_N und ψ_P als aus Produkten von individuellen, orthogonalen Eigenfunktionen durch Antisymmetrisierung erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \psi_N &= \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \Sigma_R \pm R \psi'_N(Q_1, \Sigma_1) \dots \psi_N^{n_1}(Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}), \\ \psi_P &= \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \Sigma_R \pm R \psi'_P(q_1, \sigma_1) \dots \psi_P^{n_2}(q_{n_2}, \sigma_{n_2}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Im Falle einer großen Anzahl von Teilchen dürfen die individuellen Wellenfunktionen ψ mit freie Teilchen darstellenden Wellenpaketen identifiziert werden. Aus der Rechnung wird es sich ergeben, daß jedes Proton im Mittel der Wirkung einer kleinen Anzahl (eins oder zwei) Neutronen unterliegt und umgekehrt; daher führt die Annahme von zu freien Teilchen gehörenden Wellenfunktionen infolge merklicher Polarisierungseffekte einen gewissen Fehler ein. Die Methode ist aber für Größenordnungsbestimmungen ohne Zweifel anwendbar.

Wir müssen also den über die Eigenfunktion (2) genommenen Mittelwert der gesamten Energie berechnen und nach den Bedingungen suchen, unter denen er minimal wird. Die Energie besteht aus drei Teilen:

$$W = T + E + A, \quad (4)$$

wobei T die kinetische Energie, E die elektrostatische Energie der Protonen und A die Austauschenergie bezeichnen sollen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß alle individuellen im Schwerpunkt festgesetzten Zustände entweder frei oder zweimal mit entgegengesetzter Spinrichtung besetzt seien. Dann sind n_1 und n_2 gerade Zahlen. Wir führen noch die Diracschen Dichtenmatrizen ein:

$$\left. \begin{aligned} \langle q' | \rho_N | q'' \rangle &= \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_1} \psi_N^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_N^i(q'', \sigma_i), \\ \langle q' | \rho_P | q'' \rangle &= \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_2} \psi_P^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_P^i(q'', \sigma_i). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 80, 587, 1933. Für die Möglichkeit, diese Arbeit vor der Publikation zu sehen, bin ich Herrn Prof. Heisenberg zum größten Dank verpflichtet.

Es gelten die Gleichungen:

$$\varrho_N^2 = 2\varrho_N, \quad \varrho_P^2 = 2\varrho_P, \quad (6)$$

wobei der Faktor 2 vom Spin herrührt, und daraus folgt:

$$\varrho_N = \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}, \quad \varrho_P = \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}. \quad (7)$$

Wenn M die Masse jedes Teilchens, näherungsweise dieselbe für Neutronen und Protonen, ist, wird sich ergeben:

$$T = \frac{1}{2M} \text{Spur}[(\varrho_N + \varrho_P) p^2], \quad (8)$$

$$E = \frac{e^2}{2} \int (q' | \varrho_P | q') \frac{1}{|q' - q''|} (q'' | \varrho_P | q'') dq' dq'' + \dots \quad (9)$$

Wir haben in (9) ein Glied, das im wesentlichen die *gewöhnliche*, von der Coulombschen Wechselwirkung der Protonen abhängige Austauschenergie darstellt, weggelassen. Dieses Glied ist von Dirac¹⁾ berechnet worden, und es ist nicht sehr wichtig, wenn die Anzahl der Teilchen groß ist.

Wir haben schließlich:

$$A = - \int (q' | \varrho_N | q'') J |q' - q''| (q'' | \varrho_P | q') dq' dq''. \quad (10)$$

Wenn die Zahl der Teilchen groß ist, dürfen ϱ_N und ϱ_P als fast diagonale Matrizen und sogar als klassische Funktionen von p und q betrachtet werden, und zwar ist die beste Bindung zwischen Matrizen und klassischen Funktionen²⁾ durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \left(q - \frac{v}{2} | \varrho_N | q + \frac{v}{2} \right) &= \frac{1}{h^3} \int \varrho_N(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dp, \\ \left(q - \frac{v}{2} | \varrho_P | q + \frac{v}{2} \right) &= \frac{1}{h^3} \int \varrho_P(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dp \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und durch diejenige, die man aus Umkehrung der Fourierschen Integrale erhält.

Wenn man in die vorigen Ausdrücke (11) einsetzt, bekommt man:

$$T = \frac{1}{2M} \int \frac{\varrho_N(p, q) + \varrho_P(p, q)}{h^3} p^2 dp dq, \quad (12)$$

$$E = \frac{e^2}{2} \frac{\varrho_P(p, q) \varrho_P(p', q')}{h^6} \frac{1}{|q - q'|} dp dq dp' dq', \quad (13)$$

$$A = \int \frac{\varrho_N(p, q) V_N(p, q)}{h^3} dp dq = \int \frac{\varrho_P(p, q) V_P(p, q)}{h^3} dp dq, \quad (14)$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26, 376, 1930.

²⁾ Siehe z. B. Dirac, ebenda.

wobei $V_N(p, q)$ und $V_P(p, q)$ die klassischen Funktionen, die den Matrizen

$$\left. \begin{aligned} (q' | V_N | q'') &= - (q' | \varrho_P | q'') J |q' - q''|, \\ (q' | V_P | q'') &= - (q' | \varrho_N | q'') J |q' - q''| \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

entsprechen, bezeichnen sollen.

Wir nehmen nun an, daß in der Nähe eines Punktes q die Zustände kleiner Energie besetzt seien, sowohl von den Neutronen wie von den Protonen. Es wird dann einen maximalen Wert des Impulses $P_N(q)$ für die Neutronen und einen solchen für die Protonen geben; und als Folge von (7) wird sein:

$$\varrho_N(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p < P_N(q), \\ 0, & \text{,, } p > P_N(q), \end{cases} \quad (16)$$

$$\varrho_P(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p < P_P(q), \\ 0, & \text{,, } p > P_P(q). \end{cases} \quad (17)$$

Betrachten wir zunächst einen Grenzfall, d. h. den Fall sehr hoher Dichte, so daß h/p_N und h/p_P , die der Größenordnung nach der gegenseitigen Entfernung der Teilchen im Kern entsprechen, klein im Vergleich zum Wirkungsradius der Resonanzkräfte sind. Nehmen wir noch an, daß $P_N > P_P$, also die Dichte der Neutronen größer als diejenige der Protonen sei, und bemerken wir, daß man in der zweiten Gleichung (15) infolge der praktischen Diagonalität von $\varrho_N J |q' - q''|$ durch den Grenzwert $J(0)$ ersetzen kann, wenn $J(0)$ endlich ist, so wird diese Gleichung einfach

$$(q' | V_P | q'') = -J(0) (q' | \varrho_N | q''),$$

woraus folgt

$$V_P(p, q) = -J(0) \varrho_N(p, q). \quad (18)$$

Wenn wir nun in (14) diese einsetzen und bemerken, daß, wenn $\varrho_P(p, q) > 0$, auch immer $\varrho_N = 2$ ist, bekommen wir

$$A = -2J(0) \int \frac{\varrho_P(p, q)}{h^3} dp dq = -2J(0) n_2. \quad (19)$$

Das bedeutet, daß die von den Austauschkräften abhängige Bindungsenergie pro Proton im Falle sehr hoher Teilchendichte bloß gleich $-2J(0)$ ist, wenn die Neutronendichte nur größer ist als die Protonendichte. Vernachlässigen wir zunächst die Coulombsche gegenseitige Abstoßung zwischen den Protonen, was für leichte Kerne mit einer gewissen Näherung zulässig ist, und setzen wir das Verhältnis n_1/n_2 , aber nicht die Dichte fest; dann wird die potentielle Energie pro Teilchen eine gewisse Funktion der gesamten Dichte:

$$a = a(\mu), \quad \mu = \frac{8\pi}{3h^3} (P_N^3 + P_P^3), \quad (20)$$

die natürlich für $\mu = 0$ verschwindet und sich dem konstanten Wert $-\frac{2n_2}{n_1+n_2} J(0)$ für $\mu \rightarrow \infty$ nähert. Dieser Grenzwert wird das Minimum $-J(0)$ erreichen, wenn $n_1 = n_2$ ist. Für mittlere Dichten ist der allgemeine Ausdruck von $a(\mu)$ wegen (10) und (11) durch

$$a = \frac{1}{\mu} \int \int \frac{\varrho_N(p, q) \varrho_P(p', q)}{h^3} G(p, p') dp dq \quad (21)$$

gegeben, wobei $G(p, p')$ eine Funktion von $|p - p'|$ ist, die folgendermaßen mit $J(r)$ zusammenhängt:

$$G(p, p') = \int e^{-\frac{2\pi i}{h}(p-p', v)} J|v| dv \quad (22)$$

Die kinetische Energie pro Teilchen wird die Form haben:

$$t = \kappa \mu^{2/3}$$

und die gesamte Energie $a + t$ kann ein Minimum für einen gewissen, nur vom Verhältnis n_1/n_2 abhängigen Wert erreichen (Fig. 3). Man erhält also

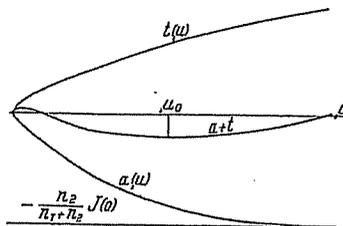


Fig. 3. Kinetische und potentielle Energie pro Teilchen.

eine konstante, von der Masse des Kernes unabhängige Dichte, und so ein Kernvolumen und einen Energieinhalt bloß proportional der Anzahl der Teilchen, wie die Erfahrung verlangt. Man kann versuchen, die Funktion $J(r)$ so zu bestimmen, daß die experimentellen Angaben am besten wiedergegeben werden. Der Ausdruck

$$J(n) = \lambda \frac{e^2}{r},$$

z. B. mit einer willkürlichen Konstante ist zweckmäßig, wenn er auch unendlich bei $r = 0$ wird. Er ist aber bei großem Abstand zu modifizieren, da er einen unendlichen Wirkungsquerschnitt für den Zusammenstoß zwischen Proton und Neutron gibt; außerdem scheint er ein zu kleines Verhältnis für die Massendefekte vom α -Teilchen und vom Wasserstoffisotop zu liefern. So muß man einen Ausdruck mit mindestens zwei Kon-

stanten benutzen, z. B. eine Exponentialfunktion, $J(r) = Ae^{-\beta r}$. Wir werden aber auf diese Untersuchung nicht näher eingehen, denn, wie schon hervorgehoben, kann die erste statistische Näherung zu erheblichen Fehlern führen, wie groß auch die Anzahl der Teilchen ist. Für schwere Kerne spielt die Coulombsche Kraft eine wichtige Rolle, und sie hat zur Folge, daß die Kernaussdehnung etwas anwächst, und auch die Dichte, sowohl der Neutronen wie der Protonen, nicht mehr örtlich konstant ist. Die Austauschbindungsenergie wird jetzt nicht bloß vom Verhältnis n_1/n_2 abhängen, sie wird sogar etwas kleiner als im Falle leichter Kerne sein, infolge der von den Coulombschen Kräften verursachten Verminderung der Dichte.

Ich möchte Herrn Prof. Heisenberg für zahlreiche Ratschläge und Erörterungen herzlich danken. Auch Herrn Prof. Ehrenfest sei für wertvolle Diskussion bestens gedankt. Endlich danke ich noch dem Consiglio Nazionale delle Ricerche für die Ermöglichung meines Aufenthaltes in Leipzig.

TEORIA SIMMETRICA DELL'ELETTRONE E DEL POSITRONE

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *Si dimostra la possibilità di pervenire a una piena simmetrizzazione formale della teoria quantistica dell'elettrone e del positrone facendo uso di un nuovo processo di quantizzazione. Il significato delle equazioni di DIRAC ne risulta alquanto modificato e non vi è più luogo a parlare di stati di energia negativa; nè a presumere per ogni altro tipo di particelle, particolarmente neutre, l'esistenza di « antiparticelle » corrispondenti ai « vuoti » di energia negativa.*

L'interpretazione dei cosiddetti « stati di energia negativa » proposta da DIRAC ⁽¹⁾ conduce, come è ben noto, a una descrizione sostanzialmente simmetrica degli elettroni e dei positroni. La sostanziale simmetria del formalismo consiste precisamente in questo, che fin dove è possibile applicare la teoria girando le difficoltà di convergenza, essa fornisce realmente risultati del tutto simmetrici. Tuttavia gli artifici suggeriti per dare alla teoria una forma simmetrica che si accordi con il suo contenuto, non sono del tutto soddisfacenti; sia perchè si parte sempre da una impostazione asimmetrica, sia perchè la simmetrizzazione viene in seguito ottenuta mediante tali procedimenti (come la cancellazione di costanti infinite) che possibilmente dovrebbero evitarsi. Perciò abbiamo tentato una nuova via che conduce più direttamente alla meta.

Per quanto riguarda gli elettroni e i positroni, da essa si può veramente attendere soltanto un progresso formale; ma ci sembra importante, per le possibili estensioni analogiche, che venga a cadere la nozione stessa di stato di energia negativa. Vedremo infatti che è perfettamente possibile costruire, nella maniera più naturale, una teoria delle particelle neutre elementari senza stati negativi.

(1) P. A. M. DIRAC, « Proc. Camb. Phil. Soc. », **30**, 150, 1924. V. anche W. HEISENBERG, « ZS. f. Phys. », **90**, 209, 1934.

1. L'elettrodinamica quantistica si può dedurre, come si sa, mediante un processo di quantizzazione da un sistema di equazioni che comprende, da una parte, le equazioni d'onda dell'elettrone di DIRAC, dall'altra le equazioni di MAXWELL in cui le densità di carica e di corrente sono rappresentate da certe espressioni formate mediante la funzione d'onda elettronica. La forma che si dà a queste espressioni aggiunge in realtà qualcosa di nuovo alle equazioni di Dirac e soltanto da essa può derivare quella asimmetria rispetto al segno della carica che nelle equazioni di Dirac non esiste. Ma poichè tali espressioni risultano automaticamente dall'applicazione di un principio variazionale da cui si deducono insieme le equazioni di Maxwell e quelle di Dirac, il nostro problema sarà dunque di esaminare il fondamento di questo principio e la possibilità di sostituirlo con altro più appropriato.

Le grandezze che figurano nelle equazioni di Maxwell-Dirac sono notoriamente di due specie: da una parte si hanno i potenziali elettromagnetici, suscettibili entro i limiti del principio di corrispondenza di interpretazione classica, dall'altra le onde materiali che rappresentano particelle obbedienti alla statistica di FERMI e che hanno significato solo come grandezze quantistiche. In queste condizioni appare poco soddisfacente che le equazioni e tutto il processo di quantizzazione si facciano dipendere da un principio variazionale che è soltanto suscettibile di interpretazione classica. Sembra più naturale il cercare una generalizzazione dei metodi variazionali tale che le variabili le quali figurano nella funzione Langrangiana abbiano, come è desiderabile, fin dal principio il loro significato finale; e rappresentino quindi delle grandezze non necessariamente commutabili. È questa appunto la via che seguiremo. Essa ha importanza sopra tutto per i campi legati alla statistica di Fermi, mentre per quanto riguarda il campo elettromagnetico ragioni di semplicità possono far presumere che nulla sia da aggiungere ai vecchi metodi. Non affronteremo del resto lo studio sistematico delle possibilità logiche offerte dal nuovo punto di vista in cui ci poniamo, ma ci limiteremo a descrivere un processo di quantizzazione dell'onda materiale che solo sembra avere attualmente importanza applicativa; esso si presenta come una naturale generalizzazione del metodo di JORDAN-WIGNER ⁽¹⁾ e permette non solo di dare una forma simmetrica alla teoria degli elettroni-positroni, ma anche di costruire una teoria sostanzialmente nuova per le particelle senza carica elettrica (neutroni e ipotetici neutrini). Per quanto non sia forse ancora pos-

(¹) P. JORDAN e E. WIGNER, « ZS. f. Phys. », 47, 631, 1928.

sibile chiedere all'esperienza una decisione fra questa nuova teoria e quella consistente nella semplice estensione delle equazioni di Dirac alle particelle neutre, va tenuto presente che la prima introduce, in questo campo ancora poco esplorato, un minor numero di entità ipotetiche.

Lasciando al lettore l'ovvia estensione delle formole seguenti ai sistemi continui di cui dovremo occuparci in seguito, esponiamo per maggiore chiarezza il metodo di quantizzazione con riferimento ai sistemi discreti. Sia dunque un sistema fisico descritto dalle variabili *reali* (matrici simmetriche Hermitiane) q_1, q_2, \dots, q_n . Definiamo una funzione Lagrangiana

$$(1) \quad L = i \sum_{r,s} (A_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + B_{rs} q_r q_s),$$

e poniamo

$$(2) \quad \delta \int L dt = 0,$$

intendendo che in queste formole A_{rs} e B_{rs} sono numeri reali ordinari, costanti i primi ed eventualmente dipendenti dal tempo i secondi, e che soddisfano alle relazioni

$$(3) \quad A_{rs} = A_{sr}; \quad B_{rs} = -B_{sr},$$

essendo inoltre $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

Se le q fossero grandezze commutabili, il principio variazionale (2) non avrebbe alcun significato essendo identicamente verificato. Per grandezze non commutabili la (2) implica invece l'annullarsi in ogni istante della matrice Hermitiana

$$i \sum_r [\delta q_r (\sum_s A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) - \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) \delta q_r] = 0,$$

comunque si scelgano le variazioni δq_r . Questo è possibile solo se le espressioni $\sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s)$ sono multiple della matrice unità, in modo che con qualche opportuna aggiunta al principio variazionale (2) (per es. imponendo l'annullarsi della somma dei termini diagonali ⁽¹⁾ in tali espressioni) si possono considerare le seguenti come equazioni del movimento

$$(4) \quad \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Vogliamo ora mostrare che queste equazioni possono farsi dipen-

(1) L'applicazione fisica che è esposta più avanti suggerisce la restrizione più rigorosa che in qualunque combinazione lineare delle q_r e \dot{q}_r con ogni autovalore debba presentarsene un altro uguale e opposto.

dere nel modo consueto

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h} (q_r H - H q_r)$$

dall'Hamiltoniana

$$(5) \quad H = -i \sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s,$$

la cui forma esatta sarà meglio giustificata in seguito, purchè si stabiliscano fra le q_r opportune relazioni di *anticommutabilità*. Sostituendo nelle (4) mediante le equazioni successive si trova infatti

$$\begin{aligned} \sum_s B_{rs} q_s &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} (q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} [(q_s q_l + q_l q_s) q_m - q_l (q_s q_m + q_m q_s)] = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{lm} B_{lm} [q_m [\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s)] + [\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s)] q_m], \end{aligned}$$

e basta porre

$$(6) \quad \sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) = \frac{h}{4\pi} \delta_{rl},$$

perchè le (4) siano soddisfatte. Indicando con $\|A_{rs}^{-1}\|$ la matrice inversa di $\|A_{rs}\|$ la (6) può scriversi

$$(6') \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1}.$$

Nel caso speciale che A sia ridotta a forma diagonale

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs},$$

si avrà dunque

$$(7) \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4 \cdot a_r} \delta_{rs}.$$

Passiamo ora ad applicare questo schema alle equazioni di Dirac.

2. Dalle equazioni di Dirac senza campo esterno

$$(8) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc \right] \psi = 0,$$

può notoriamente essere eliminata l'unità immaginaria (e in modo relativisticamente invariante) con un'opportuna scelta degli operatori α e β . Noi ci riferiremo appunto ad un sistema di coordinate intrinseche tale che renda le (8) reali, avvertendo espressamente che le formole a cui perverremo non sono valide, senza opportune modificazioni, in coordinate generali. Indicando come di consueto,

con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e ρ_1, ρ_2, ρ_3 due terne indipendenti di matrici di Pauli, porremo:

$$(9) \quad \alpha_x = \rho_1 \sigma_x; \quad \alpha_y = \rho_3; \quad \alpha_z = \rho_1 \sigma_z; \quad \beta = -\rho_1 \sigma_y;$$

con che dividendo le (9) per $-\frac{h}{2\pi i}$ e ponendovi $\beta' = -i\beta$, $\mu = \frac{2\pi mc}{h}$ si hanno le equazioni reali

$$(8') \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] \psi = 0.$$

In conseguenza le (8) si scindono in due gruppi distinti, di cui l'uno agisce sulla parte reale, l'altro sulla parte immaginaria di ψ . Poniamo $\psi = U + iV$ e consideriamo le equazioni reali (8') in quanto agiscono sulle U :

$$(10) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U = 0.$$

Queste equazioni *da sole* ⁽¹⁾, cioè senza considerare le equazioni identiche che legano le V , possono essere ricondotte al principio variazionale esposto anteriormente ed assoggettate al processo di quantizzazione già descritto, mentre nulla di simile potrebbe farsi con i metodi elementari.

Come principio variazionale da cui dedurre le (10) assumiamo il seguente:

$$(11) \quad \delta \int i \frac{hc}{2\pi} U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U dq dt = 0.$$

È facile riconoscere che le condizioni (3) nella loro naturale estensione ai sistemi continui sono verificate. Seguono in base alle (7) le relazioni di anticommutabilità

$$(12) \quad U_i(q)U_k(q') + U_k(q')U_i(q) = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta(q - q'),$$

mentre l'energia diviene, per la (5):

$$(13) \quad H = \int U^* [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] U dq.$$

L'invarianza relativistica di (12) e (13) non richiede particolare dimostrazione, poichè completando tali equazioni con quelle analoghe che si riferiscono alle V , nonchè con le relazioni di anticommutabilità fra le U e le V : $U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) = 0$, si riottiene nul-

(1) Il comportamento delle U per riflessione in un punto dello spazio si può definire convenientemente tenendo presente che, già per altre ragioni, un cambiamento simultaneo di segno delle U_r non ha significato fisico. Nel nostro schema: $U'(q) = EU(-q)$ con $E = i\rho_1 \sigma_y$ e quindi $E^2 = -1$. Similmente se si inverte l'asse del tempo: $U'(q, t) = i\rho_2 U(q, -t)$.

l'altro che l'ordinario schema di Jordan-Wigner applicato alle equazioni di Dirac senza campo. Ma è notevole che la parte di tale formalismo che si riferisce alle U (o alle V) possa *da sola* essere considerata come descrizione teorica, in armonia con i metodi generali della meccanica quantistica, di un qualche sistema materiale. Il fatto che tale formalismo ridotto non si adatti alla descrizione degli elettroni positivi e negativi, può bene essere dovuto alla presenza della carica elettrica e non impedisce l'affermazione che allo stato attuale delle nostre conoscenze le (12) e (13) costituiscono la più semplice rappresentazione teorica di un sistema di particelle neutre. Il vantaggio di questo procedimento rispetto all'interpretazione elementare delle equazioni di Dirac è (come vedremo meglio fra poco) che non vi è più nessuna ragione di presumere l'esistenza di antineutroni o antineutrini. Questi ultimi vengono in realtà utilizzati nella teoria dell'emissione β positiva⁽¹⁾, ma tale teoria può essere, ovviamente, modificata in modo che l'emissione β , sia negativa che positiva, venga sempre accompagnata dall'emissione di un neutrino.

In ragione dell'interesse che l'ipotesi suddetta conferisce alle equazioni (12) e (13), crediamo utile esaminarne da vicino il significato. Sviluppiamo perciò le U nell'interno di un cubo di lato L secondo il sistema di funzioni periodiche

$$(14) \quad f_{\gamma}(q) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)},$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z); \quad \gamma_x = \frac{n_1}{L}, \quad \gamma_y = \frac{n_2}{L}, \quad \gamma_z = \frac{n_3}{L};$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ponendo

$$(15) \quad U_r(q) = \sum_{\gamma} a_r(\gamma) f_{\gamma}(q).$$

In conseguenza, della realtà delle U , sarà

$$(16) \quad a_r(\gamma) = \bar{a}_r(-\gamma).$$

Ponendoci nel caso generale $\gamma \neq 0$, segue dalle (12)

$$(17) \quad \begin{cases} a_r(\gamma) \bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma) a_r(\gamma) = \frac{1}{2} \delta_{rs}, \\ a_r(\gamma) a_s(\gamma) + a_s(\gamma) a_r(\gamma) = 0, \\ \bar{a}_r(\gamma) \bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma) \bar{a}_r(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Tutte queste grandezze sono inoltre anticommutabili con le $a(\gamma')$ e $\bar{a}(\gamma')$ per γ' diverso sia da γ che da $-\gamma$.

(1) Cfr. G. WICK, « Rend. Accad. Lincei », 21, 170, 1935.

L'energia risulta per la (13):

$$(18) \quad H = \sum_r \sum_{s=1}^4 \left[-\hbar c(\gamma, \alpha^{rs}) - mc^2 \beta^{rs} \right] \bar{a}_r(\gamma) a_s(\gamma).$$

La quantità di moto secondo x corrisponde, come sempre, a meno del fattore $\frac{\hbar}{2\pi} i$ allo spostamento unitario in tale direzione

$$(19) \quad M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_r \sum_{s=1}^4 \hbar \gamma_{\alpha} \bar{a}_r(\gamma) a_s(\gamma),$$

e analogamente per M_y e M_z .

Per ogni valore di γ figura in (18) una forma Hermitiana che ha notoriamente due autovalori positivi e due negativi, tutti uguali in valore assoluto a $c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2}$.

Possiamo quindi porre in luogo di (18)

$$(18') \quad H = \sum_r c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2} [\bar{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \bar{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \bar{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \bar{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)]$$

essendo le b_r opportune combinazioni lineari delle a_r ottenute per trasformazione unitaria. Risulta inoltre dalla (16) che le $b_r(\gamma)$ sono esprimibili linearmente mediante le $\bar{b}_r(-\gamma)$.

Dal fatto poi che la forma Hermitiana che figura in (18) per un dato valore di γ resta invariata in virtù di (16) e (17) quando si cambia γ in $-\gamma$ segue tenendo ancora conto di (17) che si può porre:

$$(20) \quad b_3(\gamma) = \bar{b}_1(-\gamma); \quad b_4(\gamma) = \bar{b}_2(-\gamma).$$

Introducendo per semplicità le nuove variabili

$$(21) \quad B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma); \quad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma),$$

otteniamo così

$$(22) \quad H = \sum_r c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

$$(23) \quad M_x = \sum_r \hbar \gamma_{\alpha} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

essendosi posto

$$n_r(\gamma) = \bar{B}_r(\gamma)B_r(\gamma) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ed essendosi inoltre

$$(24) \quad \begin{cases} B_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')B_r(\gamma) = \delta_{rr'}\delta_{rs}, \\ B_r(\gamma)B_s(\gamma') + B_s(\gamma')B_r(\gamma) = 0, \\ \bar{B}_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')\bar{B}_r(\gamma) = 0, \end{cases}$$

come si otterrebbe formalmente per i coefficienti dello sviluppo di un'onda materiale a due componenti secondo lo schema di: Jordan-Wigner.

Queste formole sono completamente analoghe, salvo la diversa statistica, a quelle che si ottengono dalla quantizzazione delle equazioni di Maxwell. In luogo di quanti immateriali si hanno particelle con una massa di riposo finita e anche esse con due possibilità di polarizzazione. Anche qui come nel caso della radiazione, sono presenti i mezzi quanti di riposo dell'energia e della quantità di moto, salvo che il loro segno è opposto in apparente relazione con la diversa statistica. Essi non costituiscono pertanto una difficoltà specifica e allo stato attuale della teoria debbono anche qui essere considerati come semplici costanti additive prive di significato.

La descrizione mediante autofunzioni di queste particelle, così come dei quanti di luce, non riesce in modo conveniente, ma nel nostro caso l'esistenza di una massa di riposo permette di considerare l'approssimazione non relativistica, nella quale sono naturalmente valide tutte le nozioni della meccanica quantistica elementare. Questa approssimazione può avere interesse pratico sopra tutto nel caso di particelle pesanti (neutroni).

Il mezzo più semplice per passare allo spazio delle configurazioni consiste nell'associare a un generico oscillatore l'onda piana

$$\frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} \delta_{\sigma\sigma_r}, \quad (r=1, 2),$$

corrispondente allo stesso valore della quantità di moto e con due possibilità di polarizzazione per tenere conto della molteplicità degli oscillatori. Possiamo andare oltre e rappresentare con l'autofunzione complessa a due valori $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ non più una sola particella ma un sistema che ne contenga in numero indeterminato secondo il metodo di Jordan-Wigner. Basterà allora porre

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = \sum_r \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_1(\gamma), \\ \Phi_2(q) = \sum_r \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_2(\gamma). \end{cases}$$

Nell'approssimazione non relativistica $(|\gamma| \ll \frac{mc}{h})$ le costanti $b_r(\gamma)$ che figurano in (18') sono combinazioni lineari della $a_r(\gamma)$ con coefficienti indipendenti da γ .

Tali coefficienti dipendono solo dagli elementi di β e in virtù

di (9) si può porre

$$b_1(\gamma) = \frac{a_3(\gamma) - ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}; \quad b_3(\gamma) = \frac{a_3(\gamma) + ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}},$$

$$b_2(\gamma) = \frac{a_4(\gamma) + ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}; \quad b_4(\gamma) = \frac{a_4(\gamma) - ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}},$$

con che anche le (20), a causa di (16), sono soddisfatte. Dalle (15) e (25) segue dunque per l'approssimazione non relativistica:

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = U_3(q) - iU_2(q), \\ \Phi_2(q) = U_4(q) + iU_1(q). \end{cases}$$

Notiamo la circostanza, di interesse puramente formale, che $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ coincide a meno del fattore $\sqrt{2}$ con la coppia di componenti *grandi* delle autofunzioni appartenenti alle equazioni (10), interpretate nel modo consueto, senza cioè restrizioni di realtà. Per dimostrarlo basta verificare che la trasformazione $\psi = \frac{1 - \rho_2 \sigma_y}{\sqrt{2}} U$ permette di passare dallo schema (9) a quello usuale di Dirac ($\alpha = \rho_1 \sigma; \beta = \rho_3$) e che risulta effettivamente

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_2;$$

in tale schema sono infatti notoriamente ψ_3 e ψ_4 le componenti grandi. Questo avvicinamento, se chiarisce la legge di trasformazione di Φ di fronte alle rotazioni nello spazio, cessa naturalmente di avere significato in rapporto alle trasformazioni generali di Lorentz.

L'esistenza di formole semplici come le (26), potrebbe fare ritenere superfluo, almeno fino a una certa approssimazione, il passaggio attraverso le onde piane. In realtà tale passaggio è sempre concettualmente necessario per ottenere la cancellazione dei *mezzi quanti di riposo*. Dopo tale cancellazione l'espressione dell'energia è infatti naturalmente in prima approssimazione.

$$(27) \quad H = \int \tilde{\Phi} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \Phi dq,$$

e differisce quindi in modo essenziale dalla (13).

3. Come abbiamo già detto, lo schema (12) non è sufficiente per la descrizione di particelle cariche; ma l'aggiunta di una seconda quaterna di grandezze reali V_r , analoghe alle U_r , permette di riottenere l'ordinaria elettrodinamica in una forma simmetrica rispetto all'elettrone e al positrone. Consideriamo dunque due serie di gran-

dezze reali rappresentanti rispettivamente le particelle materiali e il campo elettromagnetico. Le grandezze della prima specie vanno interpretate secondo lo schema esposto al n. 1, mentre quelle della seconda serie, e cioè i potenziali elettromagnetici φ e $A = (A_x, A_y, A_z)$ possono intendersi come grandezze classiche quantizzate secondo la regola di Heisenberg fondata sul principio di corrispondenza. L'insieme delle equazioni di Maxwell e Dirac si potrà ottenere (con l'accennata restrizione per quanto riguarda le seconde) da un principio variazionale

$$\delta \int L dq dt,$$

risultando L dalla somma di tre termini

$$L = L' + L'' + L'''$$

di cui il primo è relativo all'onda materiale

$$(28) \quad L' = i \frac{hc}{2\pi} \left\{ U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U + \right. \\ \left. + V^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] V \right\},$$

e il secondo si riferisce al campo di radiazione che supponiamo quantizzato secondo il metodo di FERMI ⁽¹⁾

$$(29) \quad L'' = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right)^2.$$

Bisogna quindi imporre la condizione aggiunta.

$$(30) \quad \frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A = 0.$$

L'espressione (29) differisce in realtà da quella usata originariamente da FERMI, ma solo per termini integrabili. Essa conduce a una definizione del momento P_0 coniugato a φ tale da permettere l'immediata eliminazione di una delle due onde longitudinali senza passare per lo sviluppo secondo le onde piane; è a questo riguardo del tutto indifferente che il secondo termine nell'espressione (29) di L'' venga moltiplicato per una costante arbitraria diversa da zero.

Quanto al termine L''' , esso va scelto in modo che $\psi = U + iV$ obbedisca alle equazioni di DIRAC (8) completate con l'introduzione del campo esterno, cioè alle equazioni:

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c} \varphi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c} A \right) + \beta mc \right] \psi = 0.$$

(1) E. FERMI, « Rend. Accad. Lincei », 9, 881, 1929.

Questo praticamente obbliga a porre

$$(31) \quad L''' = ieU^*[\varphi + (\alpha, A)]V - ieV^*[\varphi + (\alpha, A)]U.$$

Dalla variazione dei potenziali elettromagnetici si deducono allora le seguenti espressioni per le densità di carica e di corrente

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = -ie(U^*V - V^*U) = -e \frac{\bar{\psi}\psi - \psi^*\bar{\psi}}{2}, \\ I = ie(U^*\alpha V - V^*\alpha U) = e \frac{\bar{\psi}\alpha\psi - \psi^*\alpha\bar{\psi}}{2}. \end{cases}$$

Queste espressioni differiscono da quelle consuete solo per *costanti infinite*. La cancellazione di tali costanti infinite è richiesta dalla simmetrizzazione della teoria che è già implicita nella forma scelta per il principio variazionale; infatti lo scambio di U_r e V_r , che entrano simmetricamente in L' , equivale appunto a un cambiamento di segno della carica elettrica.

Le U e V obbediscono alle relazioni di anticommutabilità

$$\begin{aligned} U_r(q)U_s(q') + U_s(q')U_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ V_r(q)V_s(q') + V_s(q')V_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) &= 0, \end{aligned}$$

equivalenti all'ordinario schema di Jordan-Wigner quando si faccia $\psi = U + iV$. I potenziali elettromagnetici φ, A_x, A_y, A_z e i loro momenti coniugati soddisfanno invece alle ordinarie relazioni di commutabilità, ad es. $P_0(q)\varphi(q') - \varphi(q')P_0(q) = \frac{\hbar}{2\pi i}\delta(q - q')$ essendo ora

$$(33) \quad \begin{cases} P_0 = -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right), \\ P_x = -\frac{1}{4\pi c} E_x; \quad P_y = -\frac{1}{4\pi c} E_y; \quad P_z = -\frac{1}{4\pi c} E_z. \end{cases}$$

L'energia consta di tre parti: $H = H' + H'' + H'''$. Il primo termine H' si deduce da L' secondo le regole già esposte. Il secondo si ottiene secondo le regole classiche $H'' = \int [P_0 \dot{\varphi} + (P, A) - L''] dq$, essendosi posto $P = (P_x, P_y, P_z)$. Quanto al termine H''' , esso si può dedurre da L''' seguendo indifferentemente l'uno o l'altro metodo (nel nostro caso $H''' = -\int L''' dq$) e così deve essere dato che L''' è funzione tanto delle grandezze di campo materiali che di quelle

elettromagnetiche. Questo prova d'altronde la necessità della posizione (5). L'equazione di continuità (30) è valida sempre purchè sia soddisfatta inizialmente insieme con l'equazione della divergenza $\text{div } E = 4\pi\rho$. Segue, per le (33), che la cinematica definita dalle relazioni di scambio deve essere ridotta mediante le equazioni

$$(34) \quad \begin{cases} P_0(q) = 0, \\ \text{div } P + \frac{1}{c}\rho = 0, \end{cases}$$

e quindi mediante la fissazione di due grandezze di campo e conseguente indeterminazione delle coniugate. La prima delle (34) importa dunque l'eliminazione di P_0 e di φ dall'espressione di H . Tale eliminazione si ottiene facilmente facendo uso delle (33) e si giunge così alla formola

$$(35) \quad H = \int \left\{ \tilde{\psi} \left[-c(\alpha, p) - \beta mc^2 \right] \psi - (A, I) + 2\pi c P^2 + \frac{1}{8\pi} |\text{rot } A|^2 \right\} dq.$$

Circa la questione dell'invarianza relativistica, osserviamo che le $\psi = U + iV$ soddisfano alle equazioni di Dirac, mentre le equazioni di Maxwell continuano anche esse a valere con espressioni delle densità di carica e di corrente che obbediscono alla legge di trasformazione relativistica. Queste due circostanze assicurano che la dimostrazione completa dell'invarianza della teoria è già implicita nei risultati di HEISENBERG e PAULI ⁽¹⁾. Passiamo ora all'interpretazione del formalismo.

4. Sviluppando la U , e analogamente le V , secondo il sistema di funzioni periodiche già considerato, troviamo come ovvia estensione della (22), dopo la cancellazione dei mezzi quanti di riposo

$$(36) \quad H' = \sum_r c \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[\bar{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) + \bar{B}_r'(\gamma) B_r'(\gamma) \right],$$

riferendosi le B_r e B_r' rispettivamente allo sviluppo delle U e V ; le B_r e B_r' e le loro coniugate obbediscono alle consuete relazioni di anticommutabilità. Introducendo, per ogni valore di γ , quattro opportune funzioni di spin $\xi_s(\gamma)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) a quattro valori complessi e formanti un sistema unitario, si potrà porre

$$(37) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r \left\{ B_1(\gamma) \xi_1(\gamma) + B_2(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}_1(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}_2(-\gamma) \xi_4(\gamma) \right\} f_r(q), \\ V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r \left\{ B_1'(\gamma) \xi_1(\gamma) + B_2'(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}_1'(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}_2'(-\gamma) \xi_4(\gamma) \right\} f_r(q), \end{cases}$$

⁽¹⁾ W. HEISENBERG e W. PAULI, « ZS. f. Phys. », 56, 1, 1929; 59, 168, 1930.

essendo inoltre soddisfatte le relazioni

$$(38) \quad \begin{cases} \xi_3(\gamma) = \bar{\xi}_1(-\gamma), \\ \xi_4(\gamma) = \bar{\xi}_2(-\gamma). \end{cases}$$

Dall'espressione (32) della densità di elettricità segue per la carica totale

$$(39) \quad \begin{aligned} Q &= -\frac{ie}{2} \int [U^*(q)V(q) - V^*(q)U(q)] dq = \\ &= -\frac{ie}{2} \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 [B_r(\gamma)\bar{B}_r'(\gamma) + \bar{B}_r(\gamma)B_r'(\gamma) - \bar{B}_r'(\gamma)B_r(\gamma) - B_r'(\gamma)\bar{B}_r(\gamma)]. \end{aligned}$$

Se si pone

$$(40) \quad C_{r,el} = \frac{B_r + iB_r'}{\sqrt{2}}; \quad C_{r,pos} = \frac{B_r - iB_r'}{\sqrt{2}}$$

le espressioni (36) e (39) dell'energia e della carica si possono portare nella forma

$$(41) \quad H' = \sum_r c \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \gamma^2} \sum_{\gamma=1}^2 (\bar{C}_{r,el} C_{r,el} + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos})$$

$$(42) \quad \begin{aligned} Q &= e \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 \left[-\left(\bar{C}_{r,el} C_{r,el} - \frac{1}{2} \right) + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= e \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 \left(-\bar{C}_{r,el} C_{r,el} + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos} \right). \end{aligned}$$

L'eliminazione dei *mezzi quanti di riposo di elettricità* avviene dunque automaticamente purchè, bene inteso, si esegua prima la sommatoria interna. L'insieme di (41) e (42) rappresenta oscillatori equivalenti a un doppio sistema di particelle obbedienti alla statistica di FERMI con la massa di riposo m e la carica $\pm e$; le variabili $C_{r,pos}$ si riferiscono ai positroni e le $C_{r,el}$ agli elettroni.

L'eliminazione del campo elettrico longitudinale mediante la seconda delle (34) presenta difficoltà in una teoria simmetrica per l'impossibilità di porre ρ , quale risulta da (32), in forma diagonale. Il risultato dell'eliminazione è ben noto (per quanto parzialmente illusorio per difficoltà di convergenza) nell'elettrodinamica ordinaria in cui si pone $\rho = -e\bar{\psi}\psi$; ma esso è egualmente noto se si parte da $\rho = e\psi^*\bar{\psi}$ poichè quest'ultima posizione equivale interamente a invertire l'ufficio dell'elettrone e del positrone, considerando quest'ultimo come particella reale e l'elettrone come « vuoto » di positrone. Sembra plausibile che quegli elementi di matrice che risultassero della stessa forma in tali teorie opposte, si debbono conservare nella teoria simmetrica. Supponiamo dunque di aver proceduto alla eliminazione della parte irrotazionale di A e P .

L'espressione (35) di H verrà modificata in due modi: in primo luogo intendendo che A e P in questa espressione rappresentino solo la parte priva di divergenza di tali vettori; e in secondo luogo aggiungendo un termine che rappresenta l'energia elettrostatica. Questo termine ha una forma differente nella teoria ordinaria (elettrone vuoto di elettrone) e in quella opposta. Nella prima si ha conservando l'interazione di ogni particella con se stessa

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \tilde{\Psi}(q) \psi(q) \tilde{\Psi}(q') \psi(q') dq dq',$$

e nella seconda

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \psi^*(q) \bar{\Psi}(q) \psi^*(q') \bar{\Psi}(q') dq dq'.$$

Mediante le (37) e (40) si può esprimere l'energia elettrostatica in funzione delle C . I soli termini elettrostatici che hanno ricevuto applicazione fisica sono peraltro identici nelle due teorie; essi sono quelli che dal punto di vista corpuscolare si lasciano interpretare come repulsione o attrazione fra particelle distinte della stessa specie o di specie differente.

Per quanto infine concerne l'interazione con il campo di radiazione, l'unica differenza fra la teoria simmetrica e quella ordinaria riguarda la cancellazione di costanti di risultante indeterminata, relative ai singoli oscillatori, nell'espressione della densità di corrente; anche qui rimangono invariate le formole di interesse applicativo.

NUOVA SERIE

Anno VIII - 1931

IL NUOVO CIMENTO

PERIODICO FONDATA IN PISA DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI:

O. M. CORBINO - Q. MAJORANA - L. FUCCIANTI



Comperato coi fondi

N. d'inventario 3171

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

I PRESUNTI TERMINI ANOMALI DELL'ELIO

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - Due nuove righe dell'elio mettono capo secondo P. GERALD KRÜGER ai termini anomali $(2p)^3P_{012}$ e $(2s)^2S_0$. Il calcolo dell'energia e considerazioni di stabilità parlano a favore della prima interpretazione. La spiegazione della seconda riga è invece certamente erronea per ragioni energetiche, e appare inoltre improbabile che questa riga sia dovuta all'elio atomico.

Un notevole lavoro di KRÜGER ⁽¹⁾ ha portato alla scoperta di due nuove righe dell'elio, $\lambda = 320,4\text{Å}$ e $\lambda = 357,5\text{Å}$, le quali non sono combinazioni di termini conosciuti. L'autore interpreta la prima come transizione dal termine normale $1s2p^3P_{012}$ a un termine accentato $2p2p^3P_{012}$ donde sorgerebbe un vero gruppo pp^1 analogo a quelli noti in *Zn*, *Cd* e *Hg* ma qui di difficile risoluzione perchè troppo serrato; per la seconda suggerisce $1s2s^1S_0 - 2s2s^1S_0$. Entrambi questi presunti nuovi termini $2p2p^3P_{012}$ e $2s2s^1S_0$ sono assai più alti del limite normale di *He* ed è quindi energeticamente possibile la ionizzazione spontanea (effetto AUGER) di atomi che si trovino in tali stati, liberandosi un elettrone con determinata energia cinetica e cadendo l'altro nell'orbita $1s$. Tuttavia non è sempre sufficiente che l'energia di un termine cada nel campo dello spettro continuo perchè abbia luogo l'effetto AUGER, con conseguente riduzione della vita dello stato quantico e indeterminazione dell'energia; possono in certi casi ostare ragioni di simmetria che vietano rigorosamente transizioni da termini *negativi*, cioè più alti del potenziale di ionizzazione a termini dello spettro continuo, se per la conservazione dell'energia si deve richiedere che essi corrispondano a un elettrone libero e allo ione in uno stato *determinato*.

È questo appunto il caso per il termine $2p2p^3P_{012}$ dell'elio e in genere per la massima parte dei termini anomali negativi fin qui osservati e la cui interpretazione non è controversa. Al contrario il termine $2s2s^1S_0$ di cui KRÜGER postula l'esistenza, dovrebbe dar

(1) P. GERALD KRÜGER, « Phys. Rev. », **36**, 855, 1930.

luogo ad un effetto AUGER assai marcato, il cui ordine di grandezza è stato stimato da WENTZEL (1) e particolarmente da FUES (2), e tale da rendere perfettamente osservabile l'allargamento del termine, o meglio estremamente difficile l'individuazione spettroscopica di quest'ultimo. Questa obiezione contro l'osservabilità del termine $2s2s^1S_0$ dell'elio non è peraltro decisiva; in realtà i due termini $2s2s^1S_0$, e $2p2p^1S_0$, che hanno gli stessi caratteri di simmetria, non esistono separatamente nell'elio perchè la loro mutua influenza è dell'ordine di grandezza della loro separazione e tale sarebbe in qualunque atomo del tipo elio, anche per $Z \rightarrow \infty$. Come combinazione di $2s2s^1S_0$ e $2p2p^1S_0$ risultano due termini (nel seguito chiamati X e Y) il più profondo dei quali (X) derivando in modo prevalente da $2s2s^1S_0$ può assai impropriamente indicarsi con lo stesso simbolo; l'interazione dei due elettroni in questo stato è anormalmente piccola poichè anche in approssimazione nulla (per $Z \rightarrow \infty$) essi tendono a stare in posizioni diametralmente opposte rispetto al nucleo, ed è bene possibile che l'effetto AUGER sia qui assai più debole di quello calcolato da FUES per l'inesistente termine $2s2s^1S_0$.

Ma contro l'interpretazione proposta da KRÜGER per la riga $\lambda = 375,5$ stanno obiezioni di altra natura; le considerazioni che seguono tendono anzi ad escludere che questa riga sia dovuta all'elio atomico, poichè la spiegazione $1s2s^1S_0 - 2s2s^1S_0$ è inammissibile per ragioni energetiche, e le altre poche che si possono immaginare compatibilmente con la frequenza della riga sono inverosimili per diverse ragioni. Al contrario nessuna obiezione può muoversi all'interpretazione della $\lambda = 320,4$ come $1s2p^3P_{012} - 2p2p^3P_{012}$; anche il valore teorico dell'energia di $2p2p^3P_{012}$ che si calcola facilmente con un errore stimato dell'1% si accorda perfettamente con quello sperimentale.

1. - Se si trascura l'interazione e le correzioni di relatività e si prescinde dalle variabili di *spin*, da due orbite di quanto totale 2 deriva in campo coulombiano un termine multiplo 16 volte, poichè ogni elettrone può porsi nelle orbite $2s$ o $2pm$ ($m = 1, 0, -1$); la matrice di perturbazione dovuta all'interazione si lascia spezzare in matrici di grado 1 e 2, poichè possiamo separare a priori stati con simmetria differente. Si possono così costruire razionalmente come combinazione delle autofunzioni imperturbate quelle degli stati $2s2p^3P$, $2s2p^1P$, $2p2p^1D$, $2p2p^3P$, $2p2p^1S$, $2s2s^1S$ e per tutti i valori

(1) G. WENTZEL, « ZS. f. Phys. », **43**, 524, 1927.

(2) E. FUES, « ZS. f. Phys. », **43**, 726, 1927.

permessi del quanto magnetico; ad eccezione degli ultimi due tutti questi stati hanno qualche carattere di simmetria diverso rispetto allo scambio degli elettroni (singoletti e tripletti) o alle rotazioni spaziali (quanto azimutale) o assiali (quanto magnetico) o alla riflessione nel centro di forza (termini pari e dispari).

Gli ultimi due, $2p2p^1S$ e $2s2s^1S$ hanno invece la stessa simmetria. Corrispondentemente si otterranno da un'equazione quadratica le autofunzioni corrette e gli autovalori di prima approssimazione di due stati X e Y che sono combinazioni lineari di $2s2s^1S$ e $2p2p^1S$ mentre gli autovalori degli altri stati sono esprimibili razionalmente mediante gli elementi della matrice di perturbazione.

Per un atomo di numero Z con due soli elettroni nelle orbite suddette l'energia è in approssimazione nulla: $\frac{W}{R\hbar} = -2 \frac{Z^2}{2^2} = -\frac{Z^2}{2}$, in prima approssimazione sarà $\frac{W}{R\hbar} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ poichè l'interazione cresce come Z . La seconda approssimazione può in parte valutarsi con il metodo della variazione dell'unità di lunghezza ⁽¹⁾ che è qui equivalente all'assunzione di autofunzioni del tipo idrogeno con un opportuno Z^* ; con questo metodo otteniamo in generale per i termini che ci interessano, in luogo di $\frac{W}{R\hbar} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ l'espressione più corretta:

$$(1) \quad \frac{W}{R\hbar} = -\frac{Z^2}{2} + aZ - \frac{a^2}{2},$$

che corrisponde a $Z^* = Z - a$. I valori di a e i termini calcolati secondo la (1) per l'elio e riferiti all'atomo doppiamente ionizzato sono:

	a	$\nu \text{ cm}^{-1}$
(2) {	$47 + \sqrt{241}$	125300
	$\frac{128}{128}$	
	49	143500
	$\frac{128}{128}$	
	237	145700
	$\frac{640}{640}$	
	21	153300
	$\frac{64}{64}$	
	17	165000
	$\frac{64}{64}$	
	$47 - \sqrt{241}$	168800.
	$\frac{128}{128}$	

⁽¹⁾ Cfr. V. FOCK, « ZS. f. Phys. », **6B**, 855, 1930.

Prima di discutere la precisione di questo metodo dobbiamo premettere alcune considerazioni sulla stabilità dei termini, poichè termini instabili non appartengono a livelli energetici esattamente determinati. Negli atomi complessi i termini possono dividersi in due classi da tempo riconosciute sperimentalmente, poichè per i passaggi radiativi fra termini appartenenti alla stessa classe vale la regola di selezione $\Delta L = \pm 1$, mentre per le intercombinazioni $\Delta L = 0$ (regola di LAPORTE nel caso di accoppiamento normale). I termini della prima classe (termini *normali* nel senso di WIGNER ⁽¹⁾) sono pari o dispari (cioè non cambiano o cambiano segno per riflessione nel nucleo) secondo che L è pari o dispari; i termini della seconda (termini *riflessi*, secondo WIGNER) sono pari con quanto azimutale dispari o dispari con quanto azimutale pari. Nell'idrogeno o in atomi con più elettroni, se tutti ad eccezione di uno si trovano in orbite s , sono presenti soltanto termini *normali* nel senso spiegato. I termini della tabella (2) se sono instabili devono dar luogo a transizioni spontanee a stati con un elettrone in un'orbita iperbolica e l'altro nello stato fondamentale $1s$ e quindi a stati con simmetria normale; e poichè senza intervento della radiazione i caratteri di simmetria sono inalterabili dipendendo da costanti del movimento, concludiamo che dei termini (2) sono stabili i termini riflessi, instabili per effetto AUGER i termini normali, almeno nell'approssimazione non relativistica.

Ora il solo termine riflesso fra quelli riportati nella tabella è il termine $2p2p^3P$ che è pari e ha quanto azimutale dispari, e in conseguenza è il solo che abbia un'energia rigorosamente determinata, sempre a prescindere dall'accoppiamento con il campo di radiazione; tutti gli altri termini hanno una larghezza apprezzabile dell'ordine presumibile di alcune centinaia di cm^{-1} .

2. - La precisione della (1) è differente per i vari termini considerati. Per il termine $2p2p^3P$ che è il più profondo dei termini riflessi, la determinazione dell'energia con metodi variazionali è un problema di minimo assoluto se le funzioni approssimanti hanno la giusta simmetria; segue che il valore del termine riportato in (2) rappresenta un limite inferiore e possiamo presumere che l'errore relativo non sia molto diverso da quello che si commette calcolando con lo stesso metodo il termine fondamentale $1s1s^1S$, poichè si tratta in entrambi i casi di due elettroni in orbite equivalenti di quanto radiale nullo e inoltre il valore relativo dell'interazione rispetto alla

(1) E. WIGNER, « ZS. f. Phys. », **43**, 624, 1927.

grandezza del termine e conseguentemente la correzione relativa dovuta alla variazione dell'unità di lunghezza sono nei due casi poco diversi. Ora per lo stato fondamentale si trova con questo metodo

$$-\frac{W}{Rh} = \frac{729}{128} = 5,695 \text{ mentre empiricamente, e anche teoricamente}$$

secondo i calcoli di HYLLERAAS, $-\frac{W}{Rh} = 5,807$ con una differenza di meno del 2%; ammettendo nel nostro caso un errore relativo identico troviamo come valore probabile del termine $2p2p^3P$: 156350 cm^{-1} sotto il limite di He^+ , cifra effettivamente assai prossima al dato sperimentale se l'interpretazione della $\lambda = 320,4$ è corretta (156000 cm^{-1}).

Per quanto riguarda gli altri termini (2) la loro determinazione non è un problema di minimo assoluto poichè esistono infiniti stati più profondi e infiniti più elevati aventi gli stessi caratteri di simmetria; per questo può aver luogo una parziale compensazione di errori; oltre a ciò questi termini sono « ottusi » non hanno cioè una energia esattamente determinata e il loro calcolo, come quello che ho tentato per il termine X e che ricorderò più avanti, ha senso solo se non si spinge troppo oltre l'approssimazione. Ritengo che i valori dei termini riportati in (2) oltre a quello di $2p2p^3P$ non siano più errati di qualche migliaio di cm^{-1} per i più profondi (X e $2s2p^3P$) e di non molte migliaia per i più alti. Stando così le cose l'attribuzione della $\lambda = 357,5$ all'elio diventa problematica. Secondo l'interpretazione proposta da KRÜGER il termine $2s2s^1S$ o meglio il termine X starebbe circa 191000 cm^{-1} sotto il limite di He^+ e questo valore è esageratamente lontano da quello teorico (1). A fine di esaminare le altre possibili interpretazioni, osserviamo che questa riga per la sua posizione dovrebbe risultare dalla combinazione di un termine ordinario dell'elio neutro e di un termine anomalo; d'altra parte lo spettro discreto dell'elio neutro, escluso lo stato fondamentale che non può entrare in gioco, sta fra circa 439000 e 470000 cm^{-1} sotto il limite di He^+ e poichè la frequenza della riga discussa è di circa 280000 cm^{-1} dovrebbe esserne responsabile un termine anomalo posto fra 159000 e 197000 cm^{-1} sotto il solito limite. Ora i soli che soddisfino a questa condizione fra i termini ricordati, e non è il caso di prenderne in esame altri che derivino da orbite differenti e sono certamente troppo piccoli, sono il termine X e il termine $2s2p^3P$. Che la riga $\lambda = 357,5$ sia combinazione del termine $2s2p^3P$ e di un termine

(1) Una diversa valutazione riferita dall'Autore non sembra corretta.

normale è ben poco probabile, poichè l'ultimo dovrebbe avere almeno quanto totale 4 e sarebbe strano che combinazioni con termini più profondi non fossero state osservate; mi limito ad indicare come possibile questa interpretazione se sicuri indizi sorgeranno che questa riga sia dovuta all'elio atomico. Quanto al termine X , esso potrebbe fornire per la spiegazione della $\lambda = 357.5$ una combinazione con un termine normale di quanto totale 3 e la più probabile, perchè la sola che soddisfa alle regole di selezione, sarebbe $X - 1s3p^1P$; in questa ipotesi il valore del termine X sarebbe di circa 171300 cm^{-1} cioè non eccessivamente discosto da quello indicato nella tabella. Assumendo come autofunzione per lo stato X :

$$[\alpha + \beta(r_1 + r_2) + \gamma r_1 r_2 + \delta(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)] e^{-\epsilon(r_1 + r_2)}$$

che si riduce all'autofunzione imperturbata per certi valori delle costanti, e determinando invece queste con il metodo variazionale, il valore del termine X risulta di circa 168500 cm^{-1} cioè ben poco diverso da quello calcolato mediante la (1), benchè il numero di parametri sottoposti a variazione sia ora notevolmente maggiore, e ancor meno in accordo con l'ipotesi $1s3p^1P - X$. E poichè questa è per suo conto scarsamente verosimile anche per l'assenza della riga $1s2p^1P - X$ e le altre possibili interpretazioni non esaminate parzialmente sono anche più decisamente da rigettare, concludiamo che l'attribuzione della riga $\lambda = 357.5$ all'elio è ancora dubbia benchè gli accorgimenti sperimentati sembrino garantirla; e non può sostenersi senza ulteriori ricerche.

NUOVA SERIE

Anno VIII - 1931

IL NUOVO CIMENTO

PERIODICO FONDATA IN PISA DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI:

O. M. CORBINO - Q. MAJORANA - L. FUCCIANTI



Comperato coi fondi

N. d'inventario 3171

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

TEORIA DEI TRIPLETTI P' INCOMPLETI

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - I più noti tripletti anomali posti sopra il limite delle serie normali sono stabili se si trascurano le correzioni relativistiche. La presenza dei momenti magnetici intrinseci determina una leggera instabilità che solo in circostanze eccezionali può assumere importanza quantitativa. Le condizioni a ciò necessarie sono soddisfatte per la componente $j = 2$ dei tripletti anomali di Zn , Cd e Hg ; l'esperienza conferma che la componente 3P_2 di questi tripletti è assente o indebolita.

Nello spettro del calcio sono noti cinque gruppi ciascuno di sei linee che sono combinazioni del termine $1s2p^3P_{012}$ (numeri correnti empirici) con una successione di tripletti $^3P'_{012}$ che si lasciano ordinare in serie; ma il limite di questa serie corrisponde a Ca^+ con l'elettrone esterno nell'orbita $3d$ e non nell'orbita fondamentale $1s$, come accade per le serie normali, e questa ed altre circostanze obbligano ad attribuire ai tripletti P' del calcio la configurazione $3dnd^3P_{012}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$). Si tratta dunque di stati con entrambi gli elettroni eccitati. Ciò che vogliamo qui rilevare a proposito di tali termini anomali del calcio, è solo che parte di essi stanno al di sopra del potenziale di ionizzazione, nel campo dello spettro continuo, e ciò nonostante sono stabili, non danno cioè luogo a una ionizzazione spontanea apprezzabile. Questo fatto non ha nulla di strano, poichè sarebbe facile dimostrare che nell'approssimazione non relativistica i detti termini hanno tali caratteri di simmetria che le transizioni allo spettro continuo sono rigorosamente vietate. Ma in altri elementi e precisamente in Zn , Cd e Hg sono conosciuti tripletti P' oltre il potenziale di ionizzazione che dovrebbero essere stabili per le stesse ragioni, ma nei quali manca la componente P'_2 , mentre P'_1 e P'_0 sono state osservate. Questi termini di Zn , Cd e Hg sono analoghi a quelli del calcio ora ricordati, benchè derivino da configurazioni differenti (pp in luogo di dd), e perchè in quelli manchi una componente, e precisamente P'_2 , è quanto qui ci proponiamo di studiare. L'ipotesi affacciata da FOOTE, TAKAMINE e CHENAULT (¹), limitatamente a Cd , e

(¹) P. D. FOOTE, T. TAKAMINE e R. L. CHENAULT, « Phys. Rev. », **26**, 174, 1925.

anche per spiegare certe anomalie di intensità, che il termine P'_2 esista, ma sia accidentalmente così prossimo a P'_1 da renderne impossibile la risoluzione, non mi sembra sostenibile, sia perchè di troppo contraddice alle regole dell'accoppiamento normale, sia perchè è smentita dalla mancanza dei termini analoghi, di Zn e Hg . Voglio ancora notare che per Zn , esattamente al posto delle righe mancanti ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ e ${}^3P'_2 - {}^3P_1$ SAWYER (1) pose due linee ${}^1D_2 - {}^3P_2$ e ${}^1D_2 - {}^3P_1$ più deboli e di aspetto differente da quello delle quattro linee restanti del gruppo $P P'$, essendo 1D_2 uno degli stati che derivano da due orbite $2p$; secondo la presente teoria le righe di SAWYER sono invece precisamente le righe ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ e ${}^3P'_2 - {}^3P_1$ che completano il gruppo $P P'$, indebolite perchè il termine ${}^3P'_2$ è instabile per effetto AUGER, e questo è dovuto all'interazione fra *spin* e orbita; al contrario righe che fanno capo al termine 1D_2 non devono essere osservabili perchè la instabilità di questo termine è assai maggiore, non ostandovi i suoi caratteri di simmetria anche se si prescinde dal momento magnetico degli elettroni.

1. Da due orbite $2p$ equivalenti derivano senza elettrone rotante i termini 1D , 3P e 1S (gli indici di molteplicità indicano solo simmetria o antisimmetria delle autofunzioni dei baricentri) la cui separazione dipende in prima approssimazione da un unico parametro e può calcolarsi con il metodo di SLATER (2); si trova che 3P è il più profondo, 1S il più alto, e che la distanza ${}^1S - {}^1D$ vale $\frac{3}{2}$ della distanza ${}^1D - {}^3P$. Per ciò che riguarda il valore assoluto della separazione, possiamo stimarne l'ordine di grandezza, usando autofunzioni approssimate. I risultati di questo metodo si accordano bene con quanto si osserva, ad es., nei termini profondi del silicio; ma vi sono dei casi in cui la prima approssimazione è insufficiente, e citiamo il magnesio dove sono conosciuti il termine $(2p)^{23}P_{012}$ e, se un'interpretazione di SAWYER (3) è corretta, anche il termine $(2p)^{21}D_2$. Qui il termine 1D_2 è effettivamente più alto di ${}^3P_{012}$ come vuole il metodo di SLATER, ma la separazione è solo di alcune centinaia di cm^{-1} non di alcune migliaia come quel metodo farebbe prevedere; l'anomalia può forse essere spiegata con l'influenza prevalente dello spettro continuo, specie dello « stato virtuale » $(3d)^{21}D_2$ sul termine $(2p)^{21}D_2$. Ragioni analoghe possono valere per i termini $(2p)^{23}P_{012}$ e $(2p)^{21}D_2$.

(1) R. A. SAWYER, « Journ. Opt. Soc. », **13**, 431, 1926.

(2) J. C. SLATER, « Phys. Rev. », **34**, 1293, 1929.

(3) R. A. SAWYER, loc. cit..

di Zn , Cd e Hg , ma qui si tratta di termini che sono sopra il limite di ionizzazione, e non considerando il momento magnetico dell'elettrone, solo il primo è stabile, perchè è un termine *riflesso* ⁽¹⁾ mentre gli stati dello spettro continuo appartenenti alla stessa energia hanno simmetria normale; $(2p)^{21}D_2$ è al contrario esso stesso uno « stato virtuale » nel senso di BECK ⁽²⁾, e la sua energia, non esattamente definita, è poco maggiore di quella di $(2p)^{23}P_{012}$. L'interazione fra momento intrinseco e orbitale di ciascuno dei due elettroni stabilisce però una mutua influenza fra lo stato virtuale $(2p)^{21}D_2$ e quella componente di $(2p)^{23}P_{012}$ che appartiene allo stesso valore del quanto interno ($j=2$); e la conseguenza è che anche 3P_2 diviene instabile, potendo dar luogo a una ionizzazione spontanea che significa passaggio *senza radiazione* da tripletti a singoletti. La vicinanza di uno stato virtuale con opportuni caratteri di simmetria è necessaria solo perchè l'effetto Auger assuma importanza quantitativa, ma anche quando quello manca come per la componente 3P_1 , o è abbastanza lontana, come lo stato virtuale $(2p)^{21}S_0$ per la componente 3P_0 , dobbiamo aspettarci una leggera instabilità, e questo può spiegare le anomalie di intensità osservate nelle righe superstiti del gruppo PP' . Premettiamo pertanto alcune considerazioni generali sull'influenza dei momenti magnetici intrinseci in tutti gli stati 1D_2 3P_2 3P_1 3P_0 1S_0 che derivano da due orbite $2p$. Trascurando, come è lecito per numeri atomici sufficientemente alti, l'interazione magnetica fra i due elettroni, e solo pertanto in conto l'interazione fra il campo elettrico costante dovuto al resto atomico e i momenti magnetici degli elettroni in movimento, cioè il cosiddetto accoppiamento fra *spin* e orbita, la perturbazione si può far dipendere dalla hamiltoniana:

$$(1) \quad H = f(r_1)(s_1, M_1) + f(r_2)(s_2, M_2)$$

essendo s_1 , s_2 e M_1 , M_2 i momenti intrinseci e orbitali dei due elettroni, che per semplicità supporremo misurati in unità $\frac{\hbar}{2\pi}$, e $f(r)$ una funzione del raggio proporzionale a $\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$. Scegliamo come sistema di coordinate quello in cui l'energia imperturbata è diagonale e ammettiamo ancora che con sufficiente approssimazione le autofunzioni imperturbate possano essere espresse come combinazioni lineari di prodotti di autofunzioni dei singoli elettroni, rappresentanti stati stazionari individuali in un conveniente campo centrale. Giova allora

⁽¹⁾ E. WIGNER, **43**, 624, 1927.

⁽²⁾ G. BECK, « ZS. f. Phys. », **62**, 331, 1930.

rappresentare la matrice di H come somma di prodotti delle matrici $f(r_1)$ e $f(r_2)$, facilmente valutabili mediante quadrature, per le matrici (s_1, M_1) e (s_2, M_2) , le quali ultime sono in detta approssimazione matrici costanti, che legano cioè solo stati con uguale energia, poichè tali sono separatamente s_1, M_1, s_2 e M_2 ; ma è da notare che funzioni dipendenti dalle coordinate di *un solo* elettrone, quali $f(r_1), s_1, M_1$, etc. non sono grandezze fisiche, e possono formalmente riguardarsi come tali, ed esprimersi con matrici, solo se si rinuncia al principio di PAULI e si considerano anche autofunzioni complete non antisimmetriche. La complicazione che ne risulta non è eccessiva nel caso di due soli elettroni, poichè qui un solo carattere di simmetria non Paulistico resta da considerare: quello delle autofunzioni simmetriche. Ai termini già indicati dobbiamo ancora, ad es., aggiungere i seguenti che derivano da due orbite $2p$, e che chiudo in parentesi per indicare che non soddisfano al principio di PAULI (${}^3D_{123}$) (1P_1) (3S_1). In tutto per i singoli valori di j troviamo:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 3: ({}^3D_3) \\ j = 2: ({}^1D_2, {}^3P_2, ({}^3D_2)) \\ j = 1: ({}^3P_1, ({}^3D_1), ({}^1P_1), ({}^3S_1)) \\ j = 0: ({}^3P_0, {}^1S_0) \end{array} \right.$$

Poichè ognuno di questi stati è degenerato $(2j + 1)$ volte abbiamo in tutto naturalmente 36 stati, ogni elettrone potendo essere in 3 (degenerazione orbitale) \times 2 (degenerazione intrinseca) = 6 stati differenti, e il principio di esclusione è inattivo. Le matrici (s_1, M_1) e (s_2, M_2) che legano fra loro, e in prima approssimazione soltanto fra loro, gli stati (2), si costruiscono direttamente con artifici su cui lo spazio mi vieta di fermarmi. Se riferiamo righe e colonne ai vari stati nello stesso ordine in cui questi sono riportati in (2), tali matrici sono

$$j = 3 \quad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \frac{1}{2}$$

$$j = 2 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \quad (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$j=1 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$j=0 \quad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

Queste equazioni devono intendersi ripetute per ogni valore permesso del quanto magnetico. Deduciamo le seguenti espressioni di $H\psi$ per le componenti del tripletto P' :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} H^3 P_2 &= \frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3 P_2 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{2\sqrt{2}} {}^1 D_2 + \sqrt{3} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4} ({}^3 D_2) \\ H^3 P_1 &= -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3 P_1 + \sqrt{5} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4\sqrt{3}} ({}^3 D_1) + \\ &\quad + \frac{f(r_1) - f(r_2)}{2\sqrt{2}} ({}^3 P_1) - \frac{f(r_1) - f(r_2)}{\sqrt{3}} ({}^3 S_1) \\ H^3 P_0 &= -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{2} {}^3 P_0 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{\sqrt{2}} {}^1 S_0. \end{aligned} \right.$$

I quadrati dei coefficienti dello sviluppo di $H\psi$ che si riferiscono a stati dello spettro continuo aventi la stessa energia di ψ sono pro-

porzionali, in valore assoluto e in *prima approssimazione*, alla probabilità di ionizzazione spontanea, secondo la formula di WENTZEL ⁽¹⁾. I vari addendi nei secondi membri di (3) sono funzioni *pari* e quelli che appartengono a $L=l$ sono ortogonali agli stati dello spettro continuo aventi l'energia del tripletto P' , perchè tali stati risultano da un elettrone $1s$ e uno in un'orbita iperbolica e possono essere, o pari con $L=0, 2, 4, \dots$, o dispari con $L=1, 3, 5, \dots$. Gli altri termini nei secondi membri di (3) sono *normalmente* quasi ortogonali agli stessi stati dello spettro continuo, a causa della diversa dipendenza angolare, e lo sarebbero esattamente trascurando la polarizzazione; oltre a ciò portano a fattore $f(r)$ che è dell'ordine degli effetti relativistici, e poichè l'effetto AUGER dipende dal quadrato delle componenti utili di H , concludiamo che esso è *ordinariamente* assai debole per termini del nostro tipo. Le cose cambiano se è presente uno stato virtuale con energia poco diversa, come 1D_2 per la componente 3P_2 . Anche 1S_0 è uno stato virtuale che potrebbe influire sulla stabilità di 3P_0 , ma è troppo lontano e la distanza è accresciuta dagli effetti relativistici. Tornando a 1D_2 questo stato può essere descritto con una autofunzione la cui dipendenza dal tempo è della forma

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} E_0 t} e^{-\frac{t}{2T}} = e^{-\frac{2\pi i}{h} Et}$$
 essendo $E = E_0 + \frac{h}{4\pi iT}$ un autovalore *com-*

plesso; questa espressione di ψ vale naturalmente solo se entrambi gli elettroni si trovano in una regione dell'ordine delle dimensioni atomiche. Supponiamo ora che l'indeterminazione $a = \frac{h}{4\pi T}$

dell'energia di 3P_2 e la distanza d fra E_0 e l'energia di 3P_2 (incluso il termine diagonale della perturbazione H) siano piccoli rispetto al valore (negativo) del termine; introduciamo ancora $\Delta = \frac{3}{2} \overline{f(r)}$, essendo

il valore medio $\overline{f(r)}$ preso su un'orbita $2p$, che rappresenta la separazione energetica fra le componenti estreme del tripletto normale $1s2p^3P_{012}$ o, ciò che in prima approssimazione è lo stesso, la separazione del tripletto anomalo $(2p)^{23}P_{012}$. Supponiamo ancora Δ piccolo nello stesso senso. Allora si può usare un formalismo assai semplice, la cui giustificazione non sarebbe difficile fondare sulle proprietà di quelle soluzioni periodiche appartenenti a una stretta regione dello spettro continuo, secondo cui lo stato virtuale 1D_2 arbitrariamente limitato è praticamente sviluppabile; lo studio dell'influenza

(1) G. WENTZEL, « ZS. f. Phys. », **43**, 524, 1927.

di 1D_2 su 3P_2 è ridotto ad un ordinario problema di perturbazione, e si tratta di trovare gli autovalori (complessi) e gli autovettori (non ortogonali) della matrice:

$$\begin{matrix} {}^1D_2 & \left| \begin{array}{cc} d - ai & \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta & 0 \end{array} \right| \\ {}^3P_2 & \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta & 0 \end{array} \right| \end{matrix}.$$

Il coefficiente dell'immaginario nell'autovalore perturbato di 3P_2 misura con il suo valore assoluto l'indeterminazione dell'energia (semilarghezza) di questo stato, e diviso per $\frac{h}{4\pi}$ dà la probabilità di ionizzazione spontanea nell'unità di tempo. Se Δ è abbastanza piccolo di fronte a $\sqrt{d^2 + a^2}$, e questo potrebbe anche non essere il caso reale, la semilarghezza del termine 3P_2 vale $\frac{2}{9} \frac{\Delta^2}{d^2 + a^2} a^2$; per $a \rightarrow 0$ questa formola è evidente perchè indica che per avere la probabilità di ionizzazione di 3P_2 basta moltiplicare quella di 1D_2 per il rapporto in cui 1D_2 entra in 3P_2 perturbato, secondo la comune teoria delle perturbazioni. Per grandi valori di a , cioè per grande instabilità di 1D_2 , l'instabilità indotta in 3P_2 torna a diminuire dopo aver toccato un massimo, e questo è da intendere nel senso che uno stato 1D_2 eccessivamente instabile cessa di essere « uno stato virtuale », la cui presenza è in ogni caso necessaria perchè l'effetto AUGER del termine $(2p)^{23}P_2$ assuma importanza quantitativa.

$$\left[\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right] (s+1) - \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\boxed{z_0 = 0}$$

$$(s, m | a_x - i a_y | s+1, m+1) = \sqrt{(s+m+1)(s-m)}$$

$$(s, m | a_x + i a_y | s-1, m-1) = \sqrt{(s+m)(s-m-1)}$$

$$(s, m | a_z | s, m) = m$$

$$(s, m | b_x - i b_y | s+1, m+1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(s+m+1)(s+m+2)}$$

$$(s, m | b_x - i b_y | s-1, m-1) = \frac{1}{2} \sqrt{(s-m)(s-m-1)}$$

$$(s, m | b_x + i b_y | s+1, m-1) = \frac{1}{2} \sqrt{(s-m+1)(s-m+2)}$$

$$(s, m | b_x + i b_y | s-1, m-1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(s+m)(s+m-1)}$$

$$(s, m | b_z | s+1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(s+m+1)(s-m+1)}$$

$$(s, m | b_z | s-1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(s+m)(s-m)}$$

$$(s | b_z^2 X_0 | s+2) = c_{s+2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(s+m+1)(s-m+1)} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(s+m+2)(s-m+2)}$$

$$(s | b_x X_0 b_x | s+2) = c_{s+1} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\quad} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\quad}$$

$$(s | X_0 b_z^2 | s+2) = c_s \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\quad} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\quad}$$

$$(s | b_z^2 X_0 | s) = \frac{1}{4} (s+m+1)(s-m+1) c_{s+2} + \frac{1}{4} (s+m)(s-m) c_s$$

$$(s | b_x X_0 b_x | s) = \frac{1}{4} (s+m+1)(s-m+1) c_{s+1} + \frac{1}{4} (s+m)(s-m) c_{s-1}$$

$$(s | X_0 b_z^2 | s) = \frac{1}{4} (s+m+1)(s-m+1) c_s + \frac{1}{4} (s+m)(s-m) c_{s-2}$$

$$\bullet c_s = \frac{1}{2} (s+m+1)(s-m+1) \Delta c - \frac{1}{2} (s+m)(s-m) \Delta c$$

$$= \frac{2s+1}{2} \Delta c$$

$$\Delta c = c_{s+1} - c_s = c_s - c_{s-1} = \Delta$$

3.60

$$c_s = (s+1/2) \Delta$$

caso della particella - c ?

$$\left[a_0 \left(\frac{p_x}{c} + \frac{e}{c} \varphi \right) + (a_1 p + \frac{e}{c} C) - mc \right] \psi = 0$$

$$\beta = 1$$

$$a_x = i (b_x, a_0)$$

$$a_y = i (b_y, a_0)$$

$$a_z = i (b_z, a_0)$$

$$\text{dalla } a_0 = s + \frac{1}{2}$$

$$(s, m | a_x - i a_y | s+1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(s+m+1)(s+m+2)}$$

$$(s, m | a_x - i a_y | s-1, m-1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(s-m)(s-m-1)}$$

$$(s, m | a_x + i a_y | s+1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(s-m+1)(s-m+2)}$$

$$(s, m | a_x + i a_y | s-1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(s+m)(s+m-1)}$$

$$(s, m | a_z | s+1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(s+m+1)(s-m+1)}$$

$$(s, m | a_z | s-1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(s+m)(s-m)}$$

$$b_x = \frac{1}{2} e_3 b_x$$

$$a_0 = e_1, a_x = e_2 b_x$$

$$i (b_x, a_0) = \frac{1}{2} b_x (e_2, e_1)$$

$$= -\frac{1}{2} e_2 b_x$$

b_x